



Vorbemerkung:

Die Erfassung dynamischer Kräfte, die durch Wasser- oder Luftströmungen an Bauwerken erzeugt werden, ist generell schwierig. Eine wirklich *exakte* Ermittlung ist *nicht* möglich. Es können eigentlich nur *Abschätzungen* vorgenommen werden.

Im Gegensatz zum “Konstruktiven Ingenieurbau”, bei dem Kräfte oft als bekannt vorausgesetzt und lediglich in der Baukonstruktion verfolgt werden (Statik und Festigkeitslehre), besteht beim “*Konstruktiven Wasserbau*” eine wesentliche Aufgabe darin, Ansätze für *dynamische (hydrodynamische) Kräfte* zunächst zu *formulieren*.

Zur Lösung wasserbaulicher Aufgaben gibt die theoretische Hydromechanik zwei Ansätze:



- a. die Gleichungen von BERNOULLI und EULER für ideale, d.h., reibungsfrei gedachte, inkompressible Flüssigkeiten (mit dem wesentlichen Kennzeichen der *Wirbelfreiheit*) und
- b. die Gleichungen von NAVIER und STOKES für natürliche *reibungsbehaftete* Flüssigkeiten.

Trotz der großen Erfolge der theoretischen und praktischen Strömungsforschung ist der Wasserbauingenieur bei vielen Problemen noch immer auf die Durchführung teilweise aufwendiger *hydraulischer Modellversuche* angewiesen. Dies gilt insbesondere bei dreidimensionalen Strömungen und bei komplizierten Randbedingungen.

Für wirbelfrei ablaufende Strömungsvorgänge (z.B. Sickerströmungen), im Sinne einer ersten Näherung oder als Leitmodell zur Festlegung der Grenzen des eigentlichen hydraulischen Modells kann indessen als preiswertes Hilfsmittel ein *Analogmodell* verwendet werden, das auf der sog. *Potentialtheorie* basiert.



Die Potentialtheorie ist das mathematische Hilfsmittel, mit dem die Kontinuitätsgleichung (Satz von der Erhaltung der Masse ($Q = A \cdot v = \text{konst.}$)) auf die Ebene (bzw. den Raum) übertragen werden kann. Damit ist die Möglichkeit gegeben, zwei- bzw. dreidimensionale *Strömungsfelder* zu beschreiben (im Gegensatz zur eindimensionalen Rohrhydraulik).

Strömungsfeld: In einem räumlichen (bzw. ebenen) Strömungsfeld ist die Geschwindigkeit von den 3 (bzw. 2) Ortskoordinaten abhängig. Sie verändert sich mit dem Ort (vergl. konvektive Beschleunigung, → Hydromechanik I).

Die Behandlung soll hier auf das *ebene Strömungsfeld* beschränkt bleiben. Dieses wird als ein aus 2 Kurvenscharen bestehendes Netz dargestellt: *Stromlinien* und Äquipotentiallinien (kurz: *Potentiallinien*). (Tatsächlich bestände im Raum das „Netz“ aus sog. Potential- und Stromflächen. Die Beschränkung auf eine zur Strömung parallele Ebene ist berechtigt, wenn die Geschwindigkeiten in allen auf einer Normalen zu dieser Ebene liegenden Punkten die gleiche ist).



Die mathematische Grundlage stellen die Laplace'schen Potentialgleichungen

$$\Delta\varphi = \frac{\delta^2\varphi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\varphi}{\delta y^2} = 0 \quad (\text{Potentialfunktion})$$

und

$$\Delta\psi = \frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} + \frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} = 0 \quad (\text{Stromfunktion})$$

zusammen mit den Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen dar:

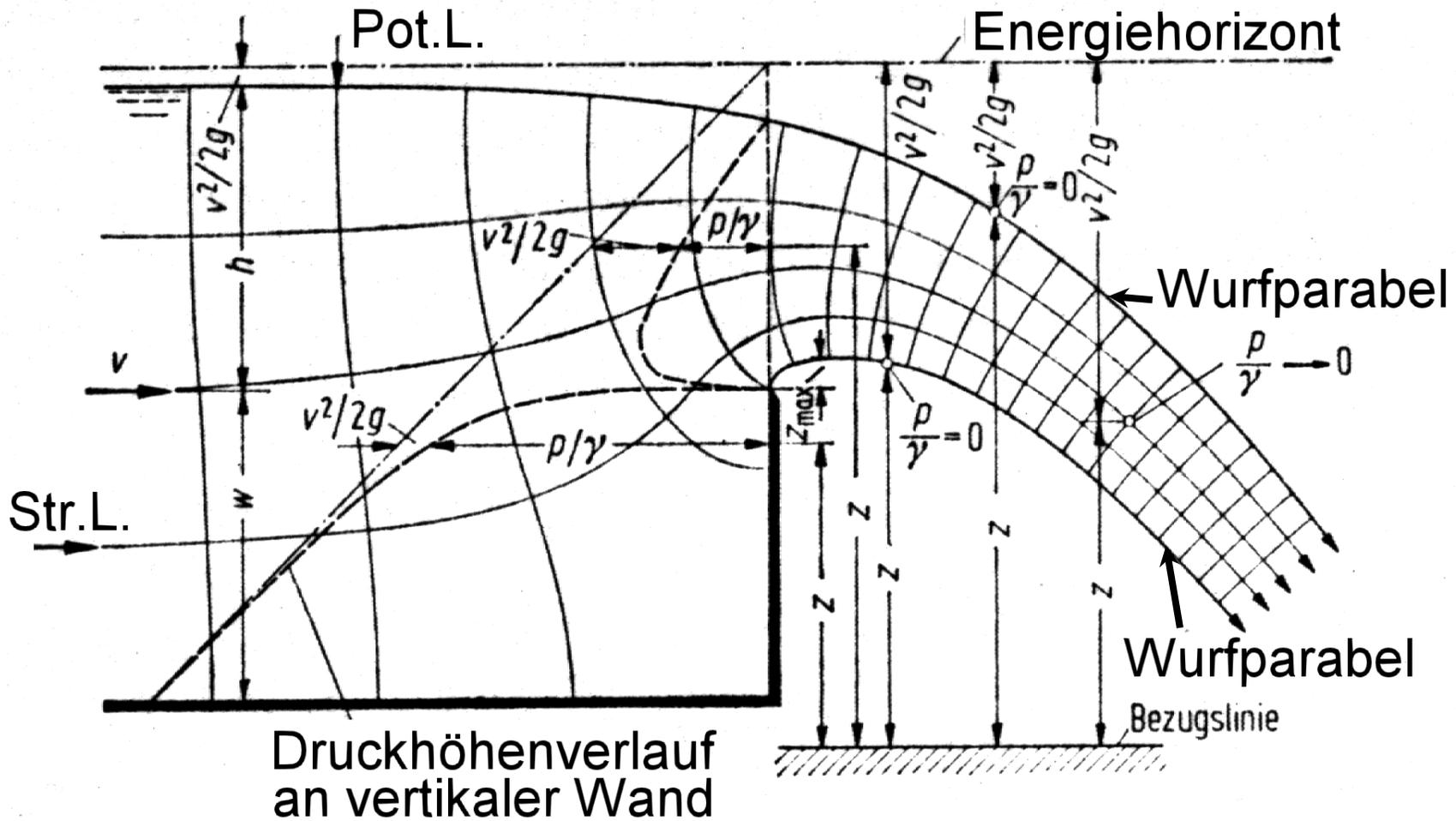
$$v_x = \frac{\delta\varphi}{\delta x} = \frac{\delta\psi}{\delta y}, \quad v_y = \frac{\delta\varphi}{\delta y} = -\frac{\delta\psi}{\delta x}$$

Näheres z.B. bei Böss, Paul (1938).



Die Lösung der Strömungsaufgabe besteht darin, die partiellen Differentialgleichungen den jeweiligen Randbedingungen anzupassen in der Art, dass das Strömungsfeld durch Kurvenscharen von Strom- und Potentiallinien als orthogonale Trajektorien beschrieben wird. Diese Aufgabe ist nun - trotz der dafür entwickelten Theorie der *“Konformen Abbildungen”* (vergl. Betz) - nur für wenige Sonderfälle geschlossen lösbar. Selbst Näherungslösungen sind in der Praxis kaum anwendbar.

Die mathematischen Schwierigkeiten der Potentialtheorie können aber umgangen werden: Es wird die Tatsache ausgenutzt, dass sich oft unterschiedliche physikalische Prozesse mit *gleichen Differentialgleichungen* beschreiben lassen, d.h., dass diese eine gleiche mathematische Struktur aufweisen. Im vorliegenden Falle besteht eine Analogie zwischen der *Potentialströmung* und dem *elektrischen Stromfeld in einem Leiter*, der für den ebenen Fall ein dünnes Widerstandspapier sein kann, vergleiche weiter unten.



Vertikalschnitt durch eine Überfallströmung an einem scharfkantigen Wehr: Potentialnetz



Grundsätze der Potentialströmungen

1. Stromlinien sind Bahnlinien der Flüssigkeitsteilchen, Tangentenrichtungen geben die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit an.
2. Jede Berandung eines Strömungsfeldes stellt selbst eine Stromlinie (Randstromlinie) dar. Die Aufgabe besteht im allgemeinen darin, bei vorgegebener Berandung zwischen den Randstromlinien das Strömungsfeld (unter Verwendung besonderer (verschiedener) Verfahren) durch weitere Stromlinien und Potentiallinien nach Geschwindigkeits- und Druckverhältnissen zu beschreiben.
3. Zwischen benachbarten Stromlinien eines Strömungsfeldes fließt jeweils die gleiche Teilmenge ΔQ ab. Gesamtabfluss $Q = n \cdot \Delta Q$ mit n = Anzahl der Stromlinienabstände. Ein "Stromfaden" wird räumlich von einer "Stromröhre" umschlossen.



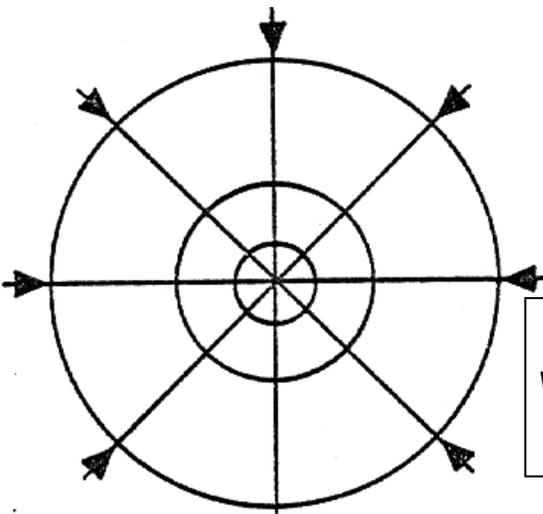
Entsprechend dem Satz von der Erhaltung der Masse (Kontinuitätsgleichung) wird die Strömungsgeschwindigkeit um so größer, je enger der Stromlinienabstand - und umgekehrt.

4. Wird der jeweilige Abstand der Stromlinien senkrecht zu den Stromlinien aufgetragen, so entstehen in der Ebene Potentiallinien (im Raum: Potentialflächen).

5. Ein durch Strom- und (Äqui-) Potentiallinien darstellbares Strömungsfeld kann als die *ebene Projektion einer räumlichen Fläche* (Topographische Karte) gedeutet werden, in der die Stromlinien $\psi = \text{konst.}$ = Falllinien und die Potentiallinien $\varphi = \text{konst.}$ = Höhenschichtlinien sind. Zwischen Höhenschichtlinien besteht der Potentialunterschied $d\varphi$, zwischen Falllinien besteht der Unterschied $d\psi$. Die Strömungsgeschwindigkeit ist dann $v = d\varphi/ds$ mit s in Strömungsrichtung (= normal zur Potentiallinie).

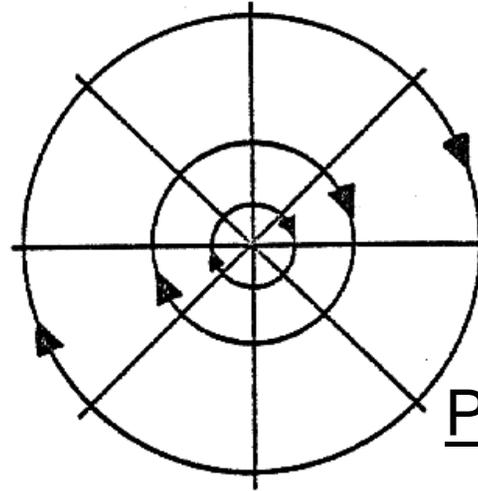


6. Sowohl aus der Anwendung der Kontinuitätsgleichung mit Bezug auf den Abstand der Stromlinien als auch aus der Anwendung des Drallsatzes ($v_1 \cdot r_1 = v_2 \cdot r_2$) mit Bezug auf den Abstand der Potentiallinien folgt, dass die Strömungsgeschwindigkeit v den Maschenseiten ds umgekehrt proportional ist. In praktischen Fällen werden Strom- und Potentiallinienabstände gleichgesetzt, so dass sich ein Netz *verzerrter Quadrate* ergibt. Ist die Strömungsgeschwindigkeit an einer Stelle bekannt, kann die Geschwindigkeitsverteilung des Feldes aus der Geometrie ermittelt werden.
7. Strom- und Potentiallinien sind vertauschbar. Jedes Strom- und Potentialliniennetz ist vierdeutig. (Z.B.: Quelle, Senke, rechts- oder linksdrehender Potentialwirbel).



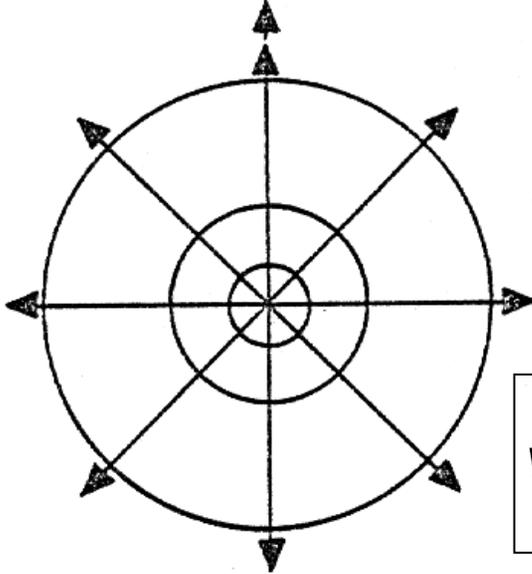
Senke

$$v = - \frac{\textit{konst.}}{r}$$



rechtsdrehend

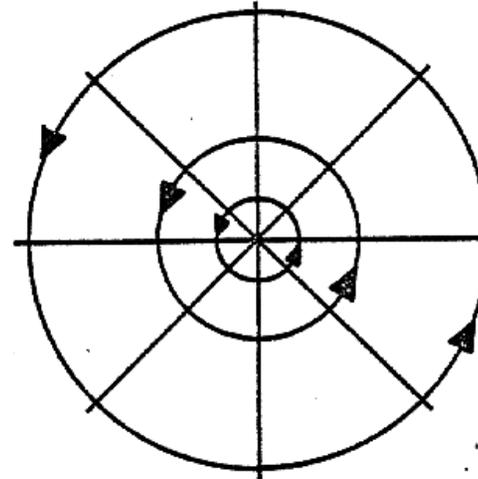
Potentialwirbel



Quelle

$$v = + \frac{\textit{konst.}}{r}$$

$$v = \pm \frac{\textit{konst.}}{r}$$

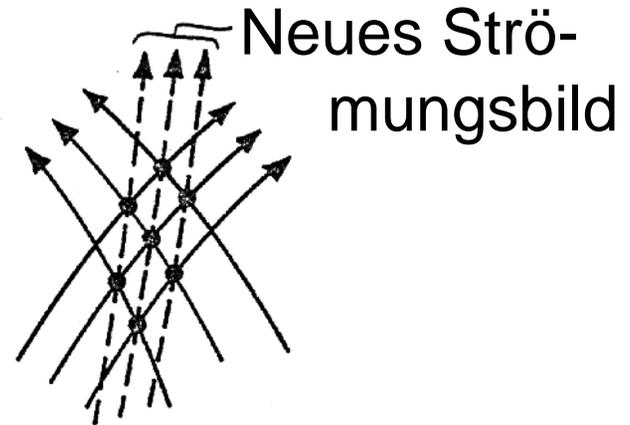


linksdrehend

Singulärer Punkt: $r = 0 \quad v \rightarrow \infty$



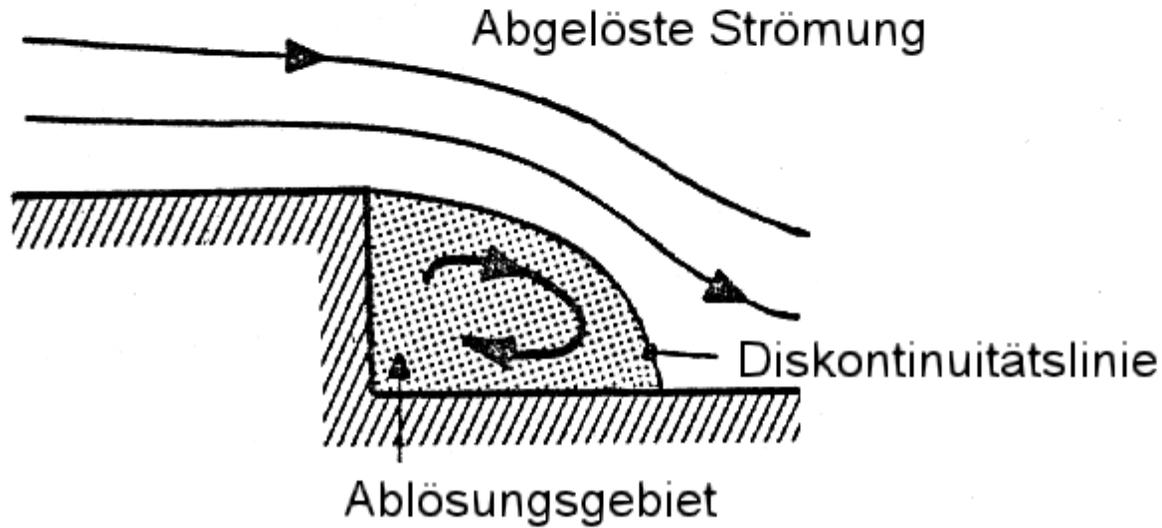
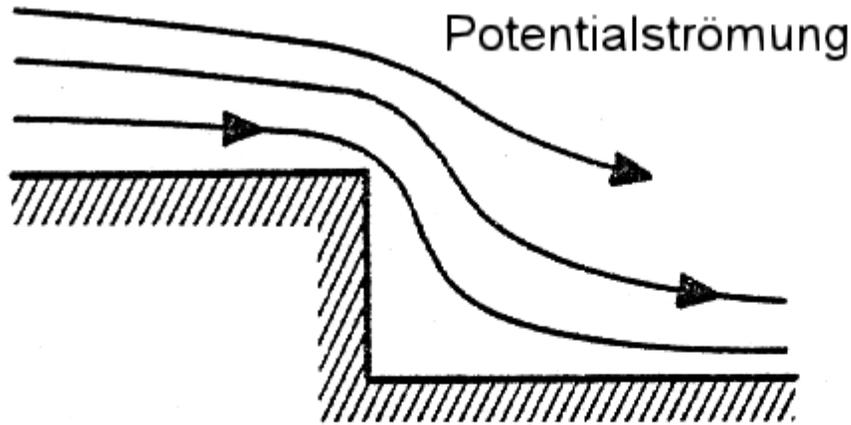
8. Potentialströmungen werden überlagert durch vektorielle Addition ihrer Strömungsgeschwindigkeiten.



9. Potentiallinien sind im allgemeinen nicht Linien gleichen Druckes (Folge aus 7.). Sie liefern durch das von ihnen bewirkte geodätische Gefälle Größe und Richtung der Geschwindigkeit.

Nur bei *Sickerströmungen* sind Potentiallinien auch Linien gleichen Druckes.

10. Für den Fall, dass sich die Strömung infolge von Reibung und Trägheit von der Berandung ablöst (turbulente Wirbelzonen), ist eine Behandlung auf der Grundlage der Potentialtheorie selbstverständlich nicht mehr gerechtfertigt.





Elektro-Analogie

In Analogie zur Potentialströmung folgt der elektrische Strom in einem elektrischen Leiter der Richtung des Spannungsgefälles und die Stromlinien stehen senkrecht auf den Linien gleicher Spannung.

Nach dem OHM'schen Gesetz gilt

$$U = R \cdot I$$

(Spannung = Widerstand x Stromstärke)

Der Differentialquotient für den Strom lautet demnach: $I = \frac{dU}{dR}$

Der =OHM'sche Widerstand des Leiters der Länge ds ist:

$$dR = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{A} \cdot ds$$

mit c = Leitfähigkeitskonstante, A = Leiterquerschnitt und ds = Längenelement.



Es ergibt sich die Analogie zwischen elektrischem Strom und der Strömung wie folgt:

Der elektrische Strom: $I = c \cdot A \cdot \frac{dU}{ds}$

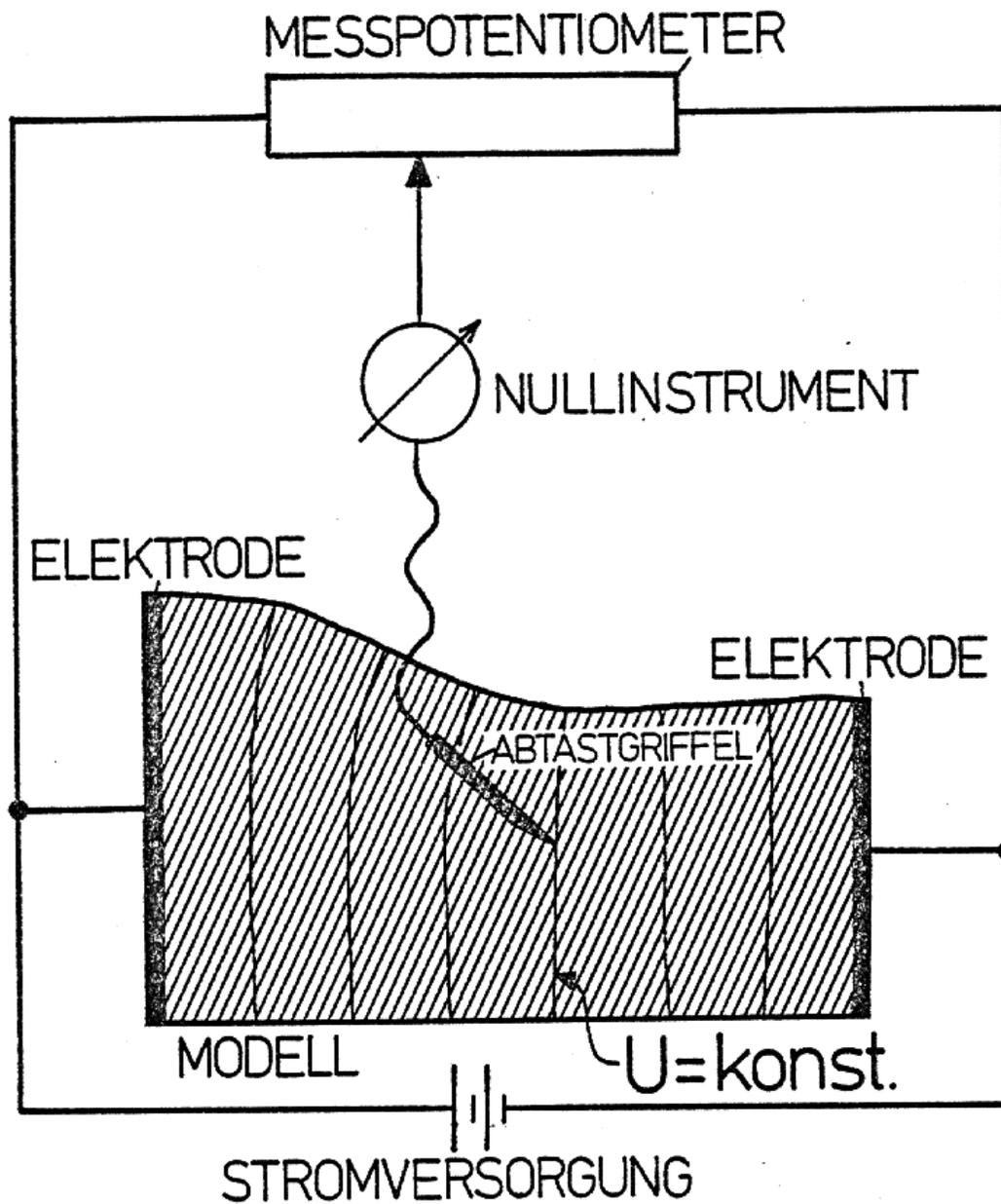
Strömung: $Q = A \cdot v = A \cdot \frac{d\varphi}{ds}$

Q ist analog I

A ist analog A

$\frac{d\varphi}{ds}$ ist analog $\frac{dU}{ds}$

c ist dabei eine unwesentliche Maßstabskonstante.



Zur Beschreibung einer ebenen Flüssigkeitsbewegung genügt eine beliebige zur Strömung parallele Ebene, da in allen auf einer Normalen zu dieser Ebene liegenden Punkten dieselbe Geschwindigkeit herrscht. Dementsprechend kann bei dem Elektro-Analogie-Verfahren ein flächenhafter Leiter verwendet werden, d.h., etwa ein Blech. Heute wird ein leitfähiges Papier (Widerstandspapier) verwendet. Linien gleicher



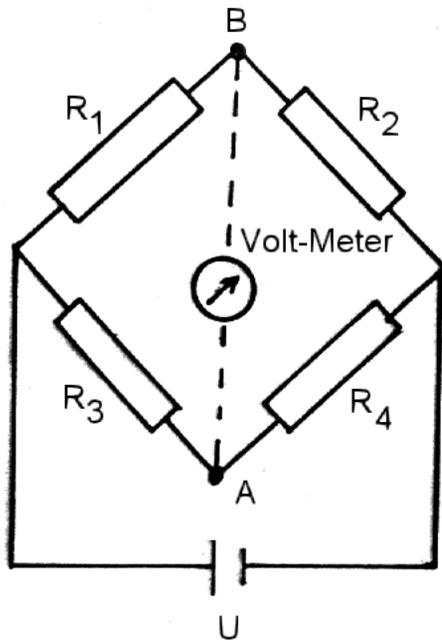
Spannung werden als Äquipotentiallinien auf dem Modell eingemessen.



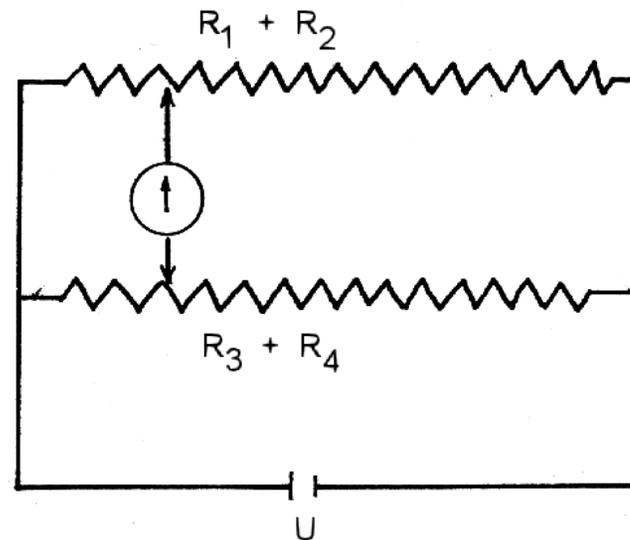
Zur Einmessung der *Strom- oder Potentiallinien* wird die WHEATSTONE'sche WIDERSTANDSSCHALTUNG (Brückenschaltung verwendet, die in der Elektrotechnik zur Messung von elektrischen (Ohm'schen) Widerständen dient.

Für den Fall dass 4 Widerstände in der gezeigten Formation zusammengesaltet sind, ist keine Potentialdifferenz (Spannungsdifferenz) zwischen A und B messbar, wenn

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$



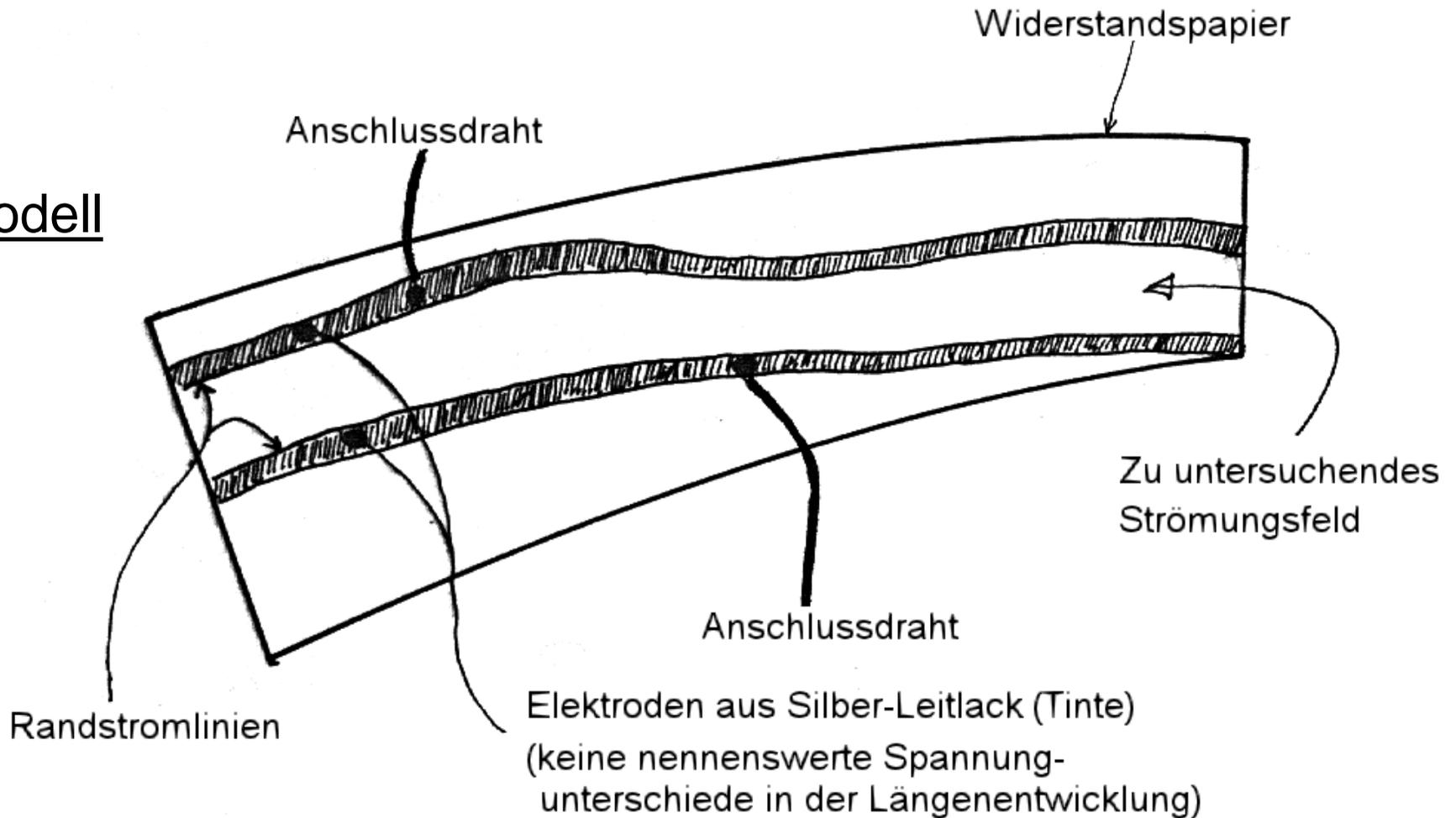
=



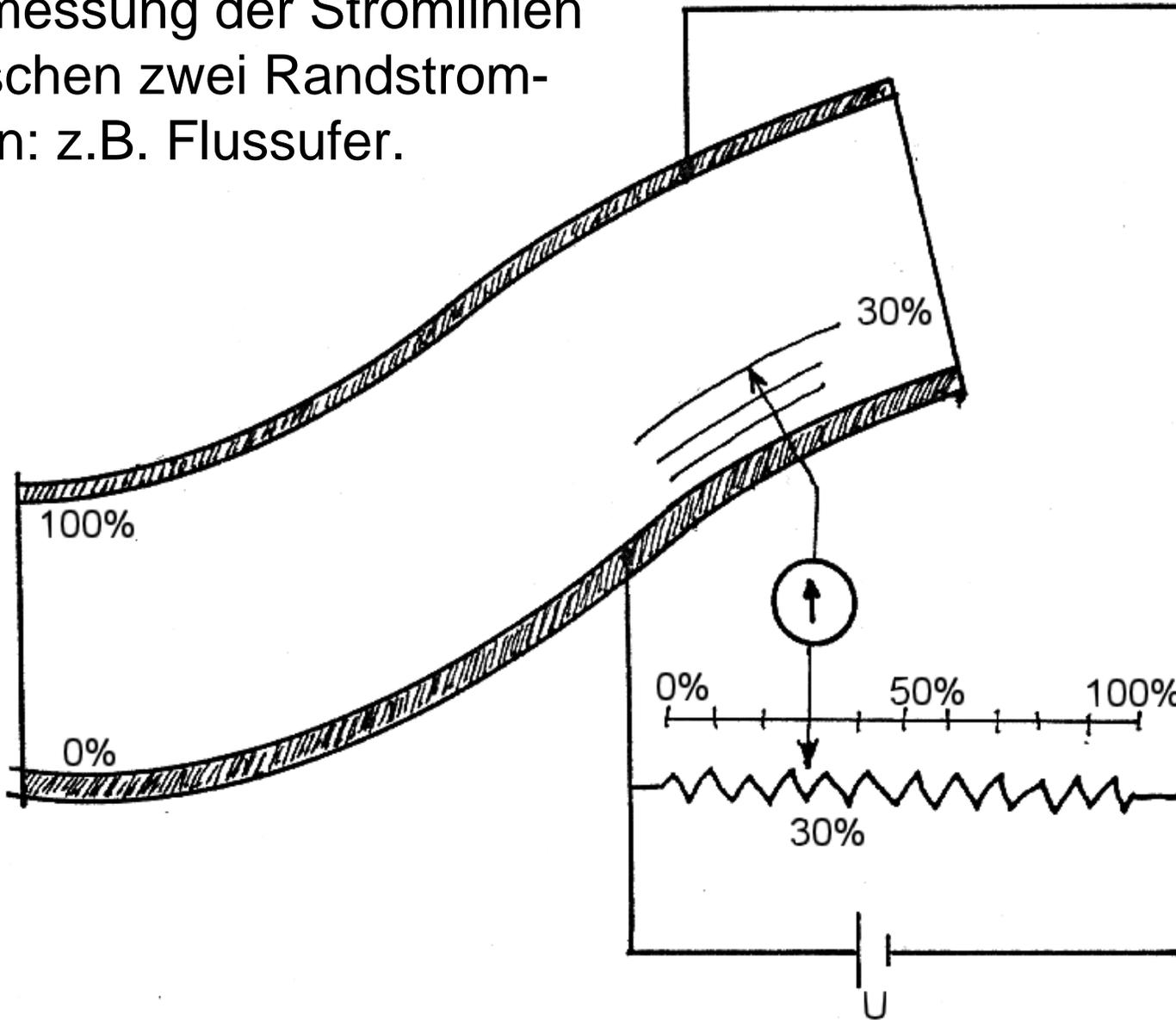


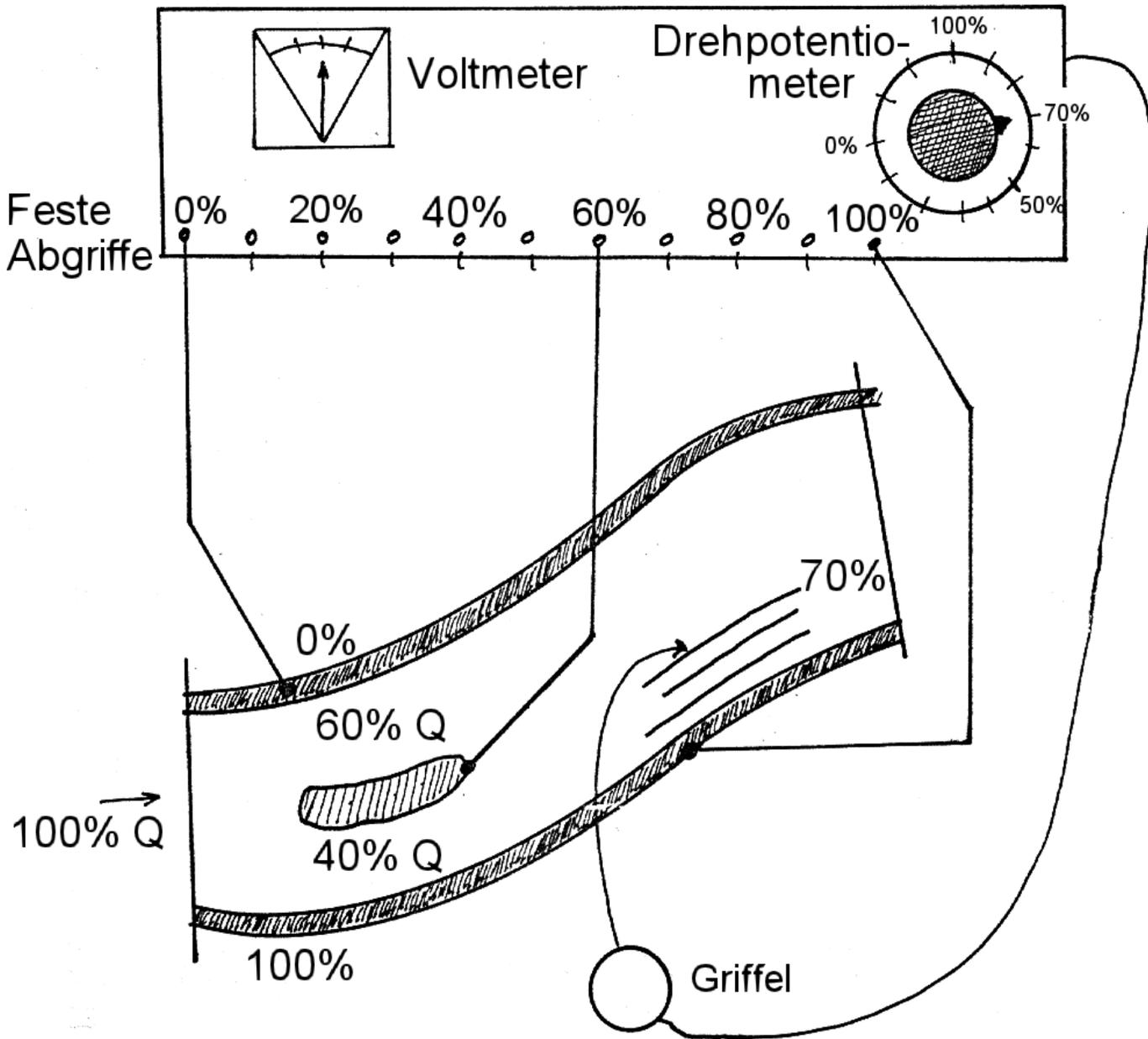
Das Modell entspricht dem *einen* aus 2 Widerständen $R_1 + R_2$ bestehenden Potentiometer, während $R_3 + R_4$ ein Messpotentiometer darstellt.

Modell



Einmessung der Stromlinien
zwischen zwei Randstrom-
linien: z.B. Flussufer.





Schema

Modell eines Flussabschnittes mit einer Insel, deren Umströmung vorgegeben sei.



Stromlinien unter einem Talsperren- Tiefschütz

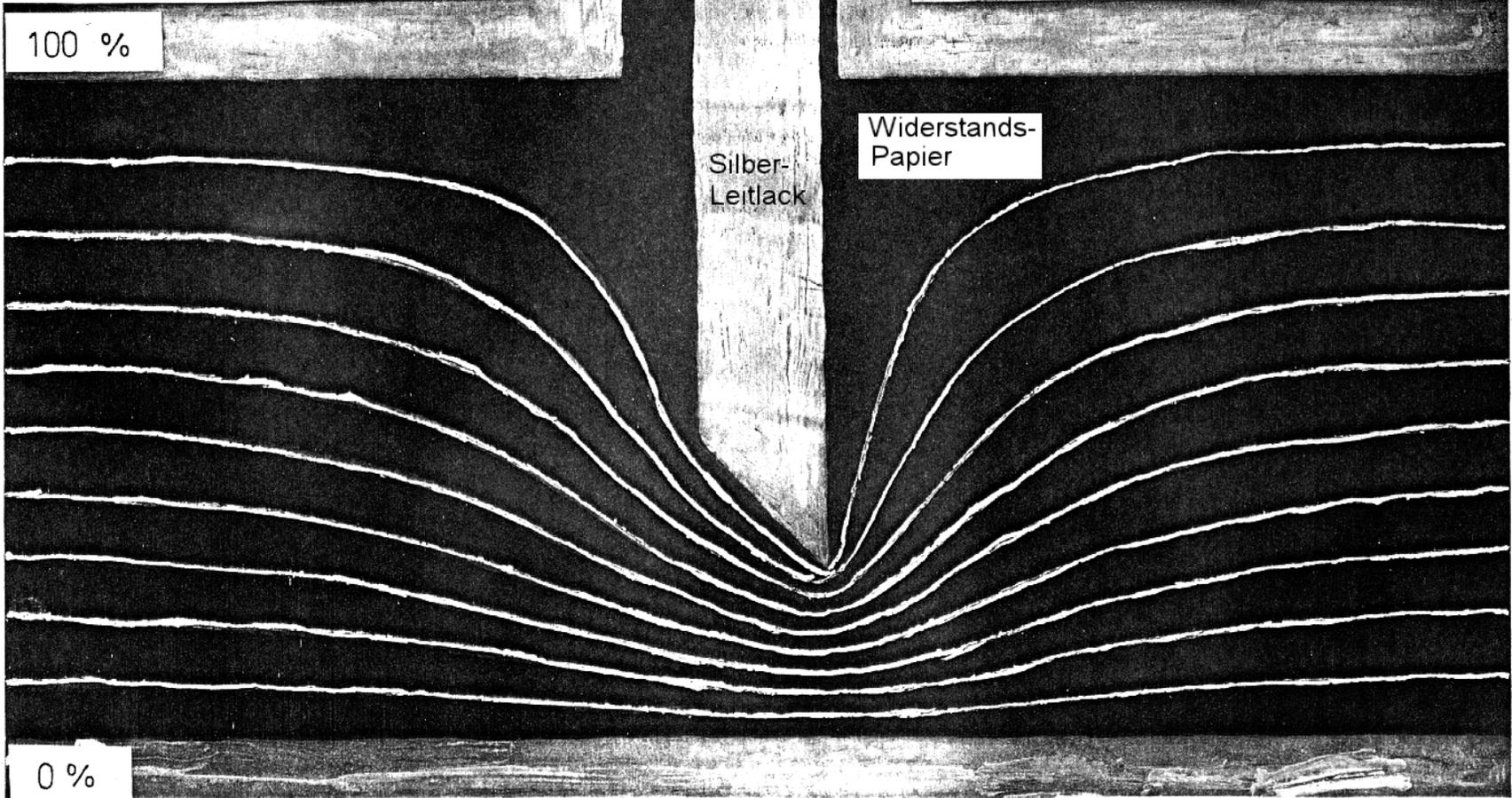
Randstromlinie = Silber-Leitlack

Keine Umströmung der
Topdichtung

Keine Stömungsablösung
an der Schützunterkante

Randstromlinie = Silber-Leitlack

Randstromlinie = Silber-Leitlack



100 %

Silber-
Leitlack

Widerstands-
Papier

0 %

Randstromlinie = Silber-Leitlack



Potentiallinien unter einem Talsperren-Tiefschütz

Keine Umströmung der Topdichtung

Keine Stömungsablösung an der Schützunterkante

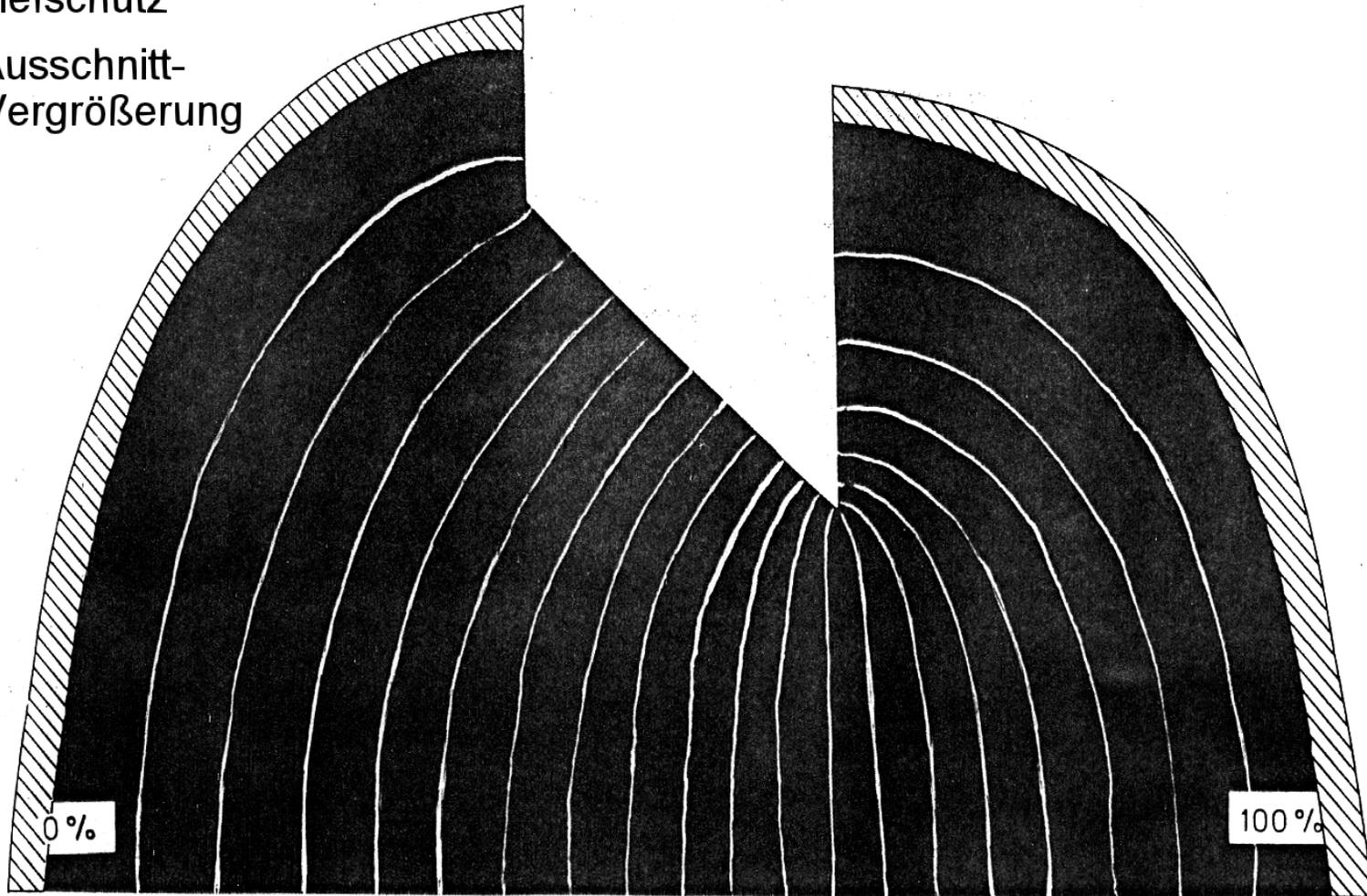




Potentiallinien unter
einem Talsperren-
Tiefschütz

Ausschnitt-
Vergrößerung

Keine Stömungsablösung
an der Schützunterkante





Stromlinien unter
einem Talsperren-
Tiefschütz

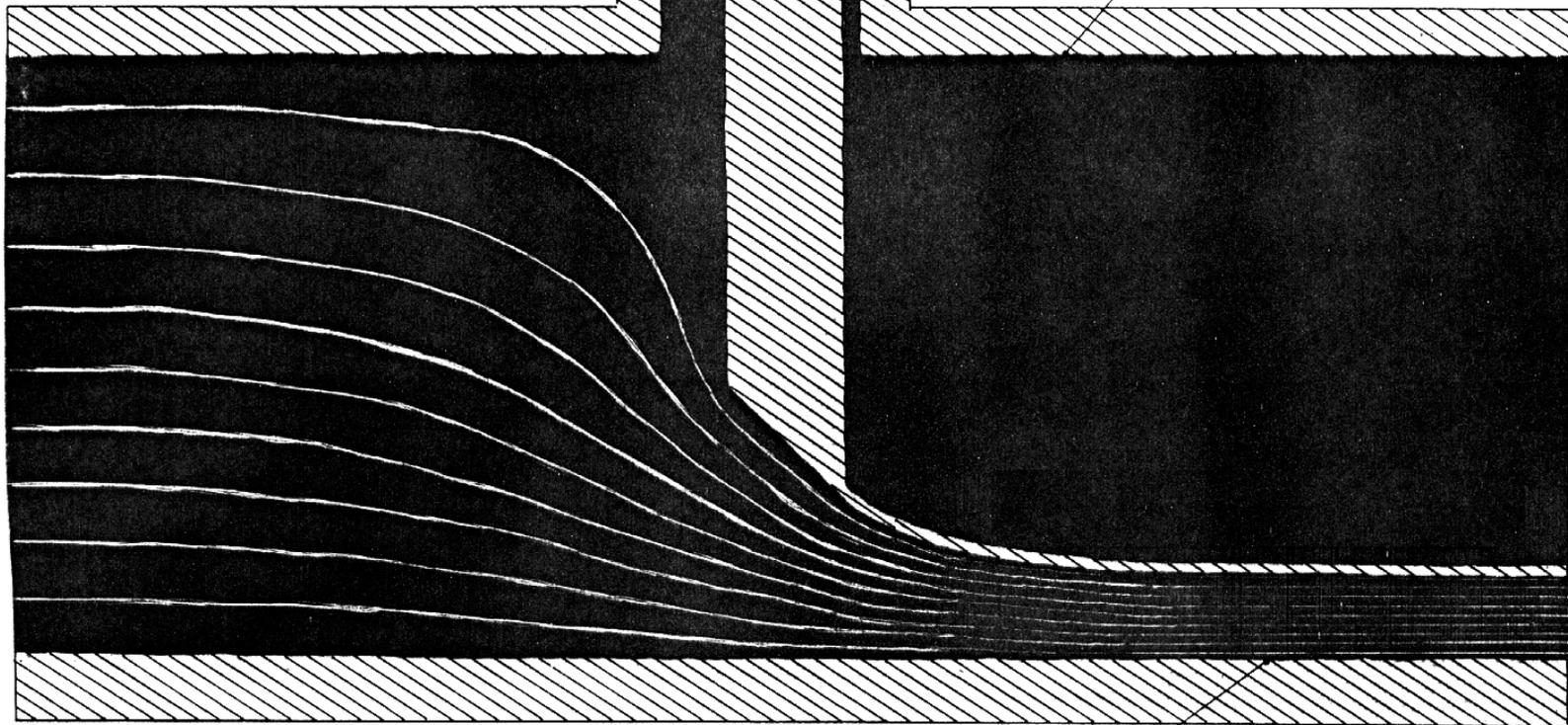
Keine Umströmung der
Topdichtung

Belüftung des UW-Kanals:
Strömungsablösung
an der Schützunterkante

Randstromlinie = Silber-Leitlack

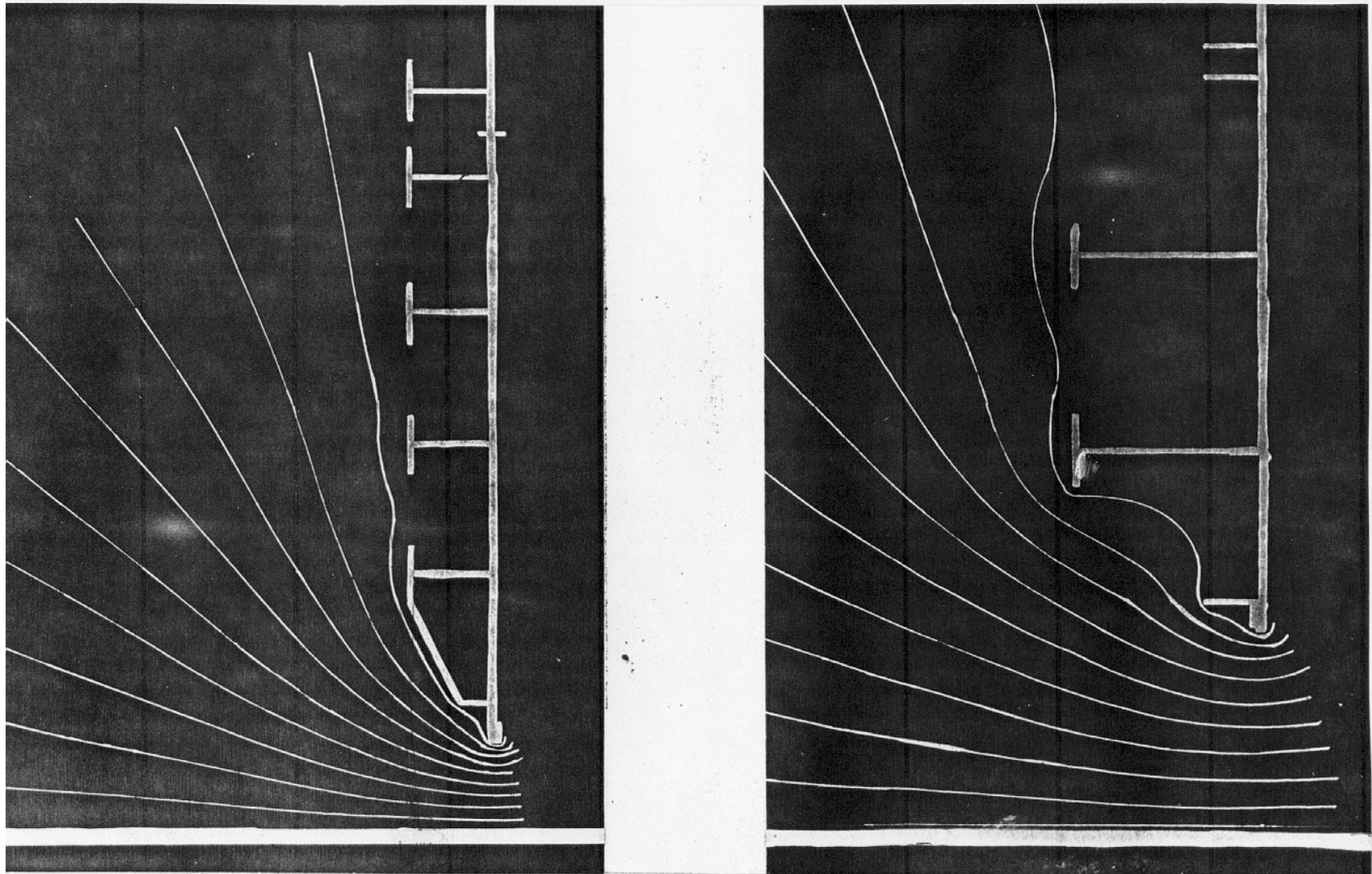
100 %

Randstromlinie = Silber-Leitlack



Randstromlinie = Silber-Leitlack

0 %



Elektro-Analog-Modelle: Unterströmung zweier unterschiedlicher Bauformen von Talsperrentiefschützen (mit und ohne Strahlleitblech).



Aufgabe:

Aus dem im Grundriss dargestellten Fluss (Abfluss $Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}$) sollen an der Stelle A $60 \text{ m}^3/\text{s}$ entnommen werden.

Davon werden nach Gebrauch $30 \text{ m}^3/\text{s}$ bei B und $20 \text{ m}^3/\text{s}$ bei C wieder in den Fluss eingeleitet, während $10 \text{ m}^3/\text{s}$ anderweitig verwendet werden.

A. Welche Gestalt hat das Stromlinienbild ?

B. Wie müssten die Elektroden eines Elektroanalogmodells angeordnet und geschaltet werden, mit dem das Stromlinienbild ermittelt werden kann ?

