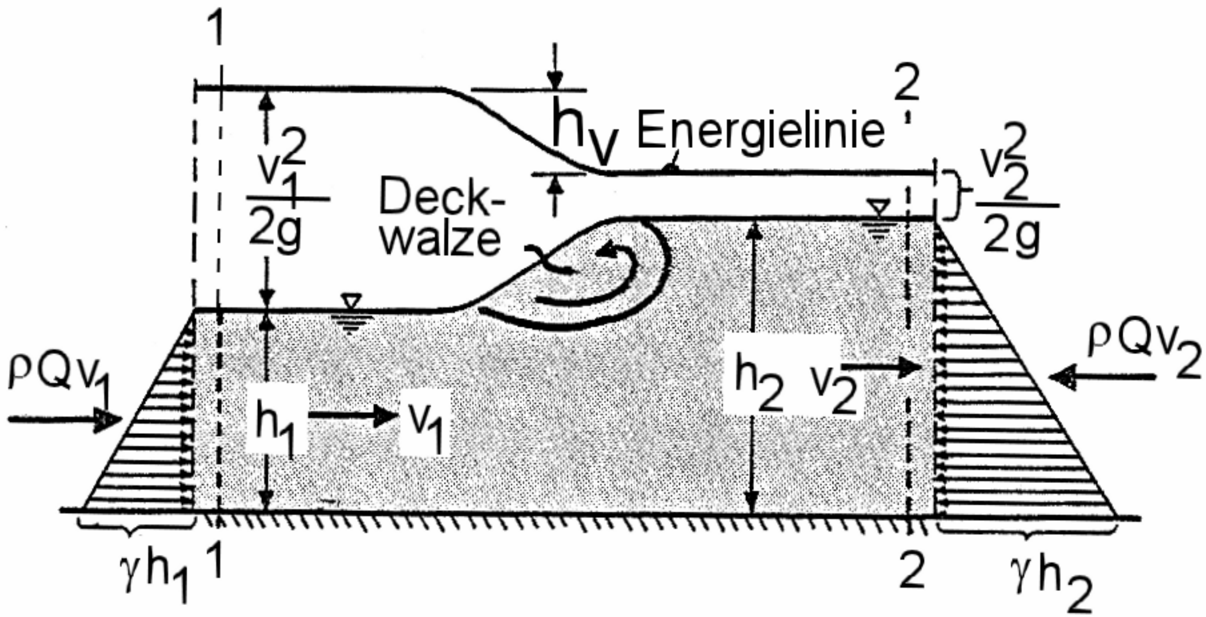
Örtliche Energiehöhenverluste (= Durchmischungsverluste)

(Grundlage: Anwendung von Energiesatz *und* Impulssatz)

1. Freispiegelgerinne

Untersuchung des *Wechselsprunges* (= Übergang vom schießenden zum strömenden Abfluss) in einem Rechteckgerinne.

$A = b \cdot h$



Schießen: $v_1 > c$
$h_1 < h_{gr}$

Strömen: $v_2 < c$
$h_2 > h_{gr}$

Die Summe aus statischer Druckkraft und dynamischer Impulskraft wird bezüglich des Fließquerschnittes *offener Gerinne* Stützkraft genannt. Dementsprechend wird hier die betreffende Anwendung *Stützkraftsatz* genannt:

$$\boxed{\gamma \cdot b \cdot \frac{h_1^2}{2} + \rho \cdot Q \cdot v_1 = \gamma \cdot b \cdot \frac{h_2^2}{2} + \rho \cdot Q \cdot v_2} \qquad (1)$$

Nach dem *Energiesatz* ist:

$$\boxed{h_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_V} \qquad (2)$$

h_1 und h_2 werden *konjugierte Wassertiefen* des Wechselsprunges genannt. Diese würden nach dem Stützkraftsatz und dem Energiesatz *unterschiedlich* berechnet, wenn die Verlusthöhe h_V im Energiesatz *nicht* enthalten wäre.
Die gleichzeitige Anwendung von Energiesatz und Stützkraftsatz ermöglicht somit die *Berechnung der Energieverlusthöhe h_V*.

Die konjugierten Wassertiefen werden nach dem Stützkraftsatz berechnet:

$$\boxed{\gamma \cdot b \cdot \frac{h_1^2}{2} + \rho \cdot Q \cdot v_1 = \gamma \cdot b \cdot \frac{h_2^2}{2} + \rho \cdot Q \cdot v_2}$$

$$\frac{\gamma \cdot b}{2} \cdot \left(h_1^2 - h_2^2\right) = \rho \cdot Q \cdot \left(v_2 - v_1\right)$$

Kontinuität: $Q = b \cdot h_1 \cdot v_1 = b \cdot h_2 \cdot v_2 = konst. \rightarrow v_2 = v_1 \cdot \frac{h_1}{h_2}$

$$\frac{\gamma \cdot b}{2} \cdot \left(h_1 + h_2\right) \cdot \left(h_1 - h_2\right) = \rho \cdot Q \cdot v_1 \cdot \left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) = \frac{\rho \cdot Q \cdot v_1}{h_2} \cdot \left(h_1 - h_2\right)$$

Weitere Umrechnung unter Verwendung von $Q = b \cdot h_1 \cdot v_1$ und $\gamma = \rho \cdot g$ führt auf die quadratische Gleichung für das Verhältnis h_2/h_1 der konjugierten Wassertiefen des Wechselsprunges:

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2 \cdot \frac{v_1^2}{g \cdot h_1} = 0$$

Mit $Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{g \cdot h_1}}$ (FROUDEsche Zahl für Querschnitt 1)

wird $$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2 \cdot Fr_1^2 = 0$$

Lösung:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \cdot Fr_1^2}$$

Physikalisch sinnvoll ist nur die positive Lösung

$$\boxed{\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + 8 \cdot Fr_1^2} - 1 \right)}$$

Für die Existenz eines Wechselsprunges ist also einer unterstrom-seitigen Wassertiefe h_2 stets nur eine oberstromseitige Wasser-tiefe h_1 eindeutig zugeordnet. Das Verhältnis der konjugierten Wassertiefen ist von der FOUDEschen Zahl Fr_1 abhängig.

Wird das gefundene Ergebnis in den Energiesatz (Gl.2) eingesetzt, ergibt sich für die <u>Verlusthöhe h_V des Wechselsprunges</u>

$$\boxed{h_V = \frac{h_1}{16} \cdot \frac{\left(\sqrt{8 \cdot Fr_1^2 + 1} - 3 \right)^3}{\sqrt{8 \cdot Fr_1^2 + 1} - 1}}$$

Oder näher-ungsweise

$$\boxed{h_V \approx \frac{\left(h_2 - h_1 \right)^3}{4 \cdot h_1 \cdot h_2}}$$

Der berechnete örtliche Energiehöhenverlust entsteht durch die Durchmischungsreibung Wasser gegen Wasser in der Diskontinuitätsfläche zwischen der Strömung und der sog. Deckwalze.
Der komplexe Prozess ist gekennzeichnet durch Turbulenz, die letztlich in Wärme umgesetzt wird. Bemerkenswert ist, dass dieser beachtliche Verlust *auf kurzer Strecke zusätzlich* zur Sohlreibung auftritt, die im Vergleich dazu *vernachnässigbar* gering ist.

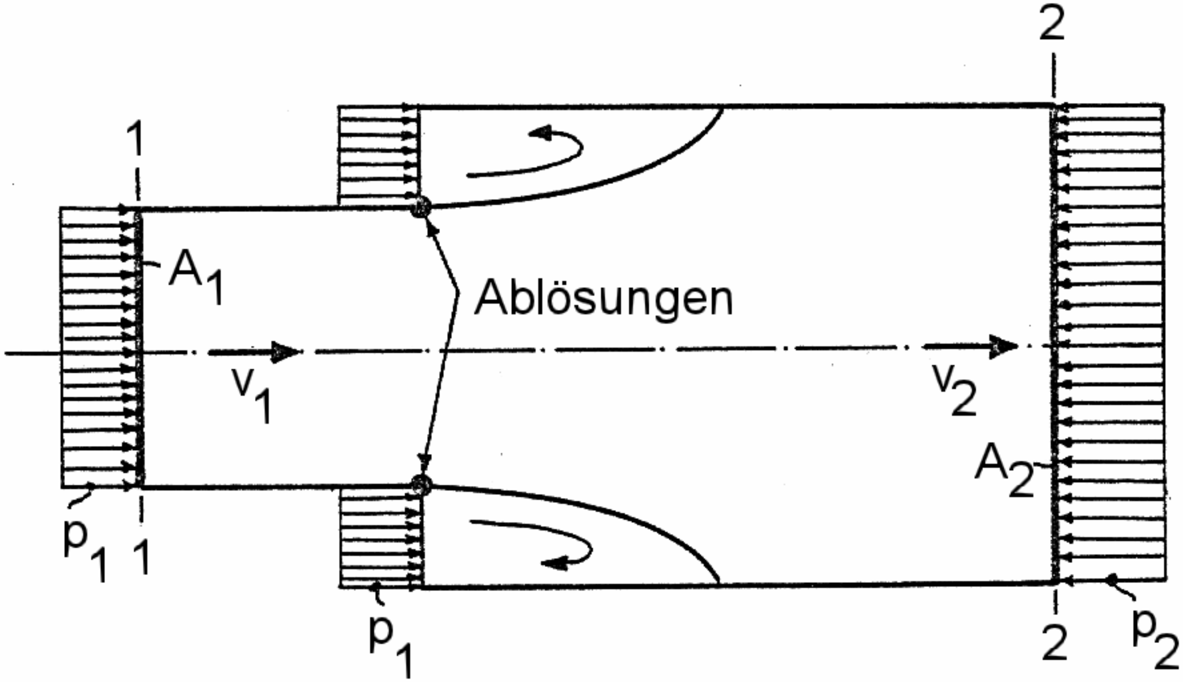
Der Wechselsprung ist besonders erwünscht hinter Wehren, wo die Energieumsetzung schadlos in sog. Tosbecken (Betonbauwerken) erfolgen kann.
Zur Vermeidung instabiler Abflussvorgänge soll die charakterisierende FROUDEsche Zahl Fr_1 groß (möglichst > 5) sein.

Die durch einen Wechselsprung verbrauchte Leistung kann berechnet werden unter Verwendung der hydraulischen Leistungsformel, vergl. 7.20 u. 9.9

$$\boxed{\Delta P = \gamma \cdot Q \cdot h_V \quad [\mathrm{kW}]}$$

2. Rohrströmung

Untersuchung einer plötzlichen Querschnittsveränderung (Rohrerweiterung), bei der sich die Strömung an der Austrittskante ablöst.



Auch hier würden Energiesatz und Impulssatz* unterschiedliche Ergebnisse liefern, wenn der Energiehöhenverlust h_V im Energiesatz unberücksichtigt bliebe.

Zuerst wird der Druckunterschied zwischen p_1 und p_2 unter Verwendung des Impulssatzes* berechnet.

Weil im Ablösungsquerschnitt noch die gleiche Geschwindigkeit v_1 wie im Kontrollquerschnitt herrscht, kann auf der Stirnfläche des Rohrstoßes (A_2 - A_1) unmittelbar vor der Ablösungszone auch der Druck als p_1 = konst. angenommen werden:

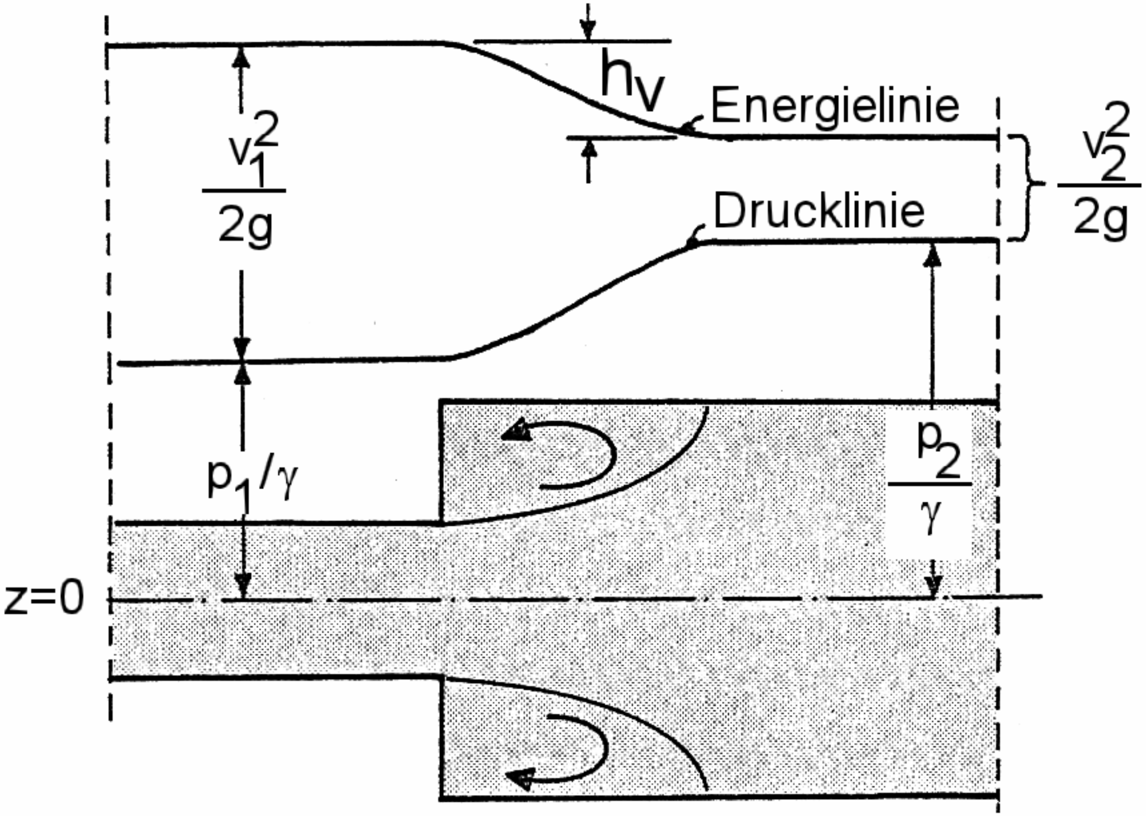
$$p_1 \cdot A_1 + p_1 \cdot \left(A_2 - A_1\right) + \rho \cdot Q \cdot v_1 = p_2 \cdot A_2 + \rho \cdot Q \cdot v_2$$

Mit $Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = konst.$ und $\gamma = \rho \cdot g$ wird

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{A_1 - A_2}{A_1 \cdot A_2^2}$$

Hier ist, $p_2 > p_1$, weil $A_2 > A_1$, vergl. folgende Darstellung.

* Bei Rohrleitungen gibt es keine besondere Bezeichnung für die Summe aus statischen Druckkräften und dynamischen Impulskräften. Die betreffende gemeinsame Anwendung wird einfach Impulssatz genannt.



Energiesatz (z = 0):

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_V \qquad \rightarrow h_V = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2 \cdot g}$$

Wiederum sind die Geschwindigkeiten durch v = Q/A zu ersetzen.

Mit der Druckhöhendifferenz $(p_1 - p_2)/\gamma$ aus dem Impulssatz wird:

$$h_V = \frac{Q^2}{g} \cdot \frac{A_1 - A_2}{A_1 \cdot A_2^2} + \frac{Q^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} \right)$$

$$h_V = \frac{Q^2}{2 \cdot g} \cdot \frac{2 \cdot A_1^2 - 2 \cdot A_1 \cdot A_2 + A_2^2 - A_1^2}{A_1^2 \cdot A_2^2}$$

$$h_V = \frac{Q^2}{2 \cdot g} \cdot \left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 \cdot A_2} \right)^2 \qquad h_V = \frac{(v_2 - v_1)^2}{2 \cdot g}$$

Stoßverlust nach BORDA-CARNOT:

$$h_V = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \cdot \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right)^2 \qquad \boxed{h_V = \zeta \cdot \frac{v_2^2}{2 \cdot g}}$$

Ohne dass der Durchmischungsvorgang im einzelnen bekannt ist, liefert die exakte Berechnung in diesem Falle für den Verlustbeiwert ζ den vom Flächen-verhältnis abhängigen Ausdruck :

$$\boxed{\zeta = \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right)^2}$$

Nach experimentellen Untersuchungen ist die obige Formel für ζ sowohl für die scharfkantige Rohrerweiterung als auch für die scharfkantige Rohrverengung zu verwenden, wenn ein Korrekturfaktor c berücksichtigt wird, der durch die von der Wirklichkeit abweichenden vereinfachenden Berechnungsannahmen begründet ist.

$$\zeta = c \cdot \left(1 - \frac{A_2}{A_1}\right)^2$$

Scharfkantige Erweiterung: $1{,}0 \leq c \leq 1{,}2$

Scharfkantige Verengung: $0{,}4 \leq c \leq 0{,}5$

Ganz allgemein werden örtliche Energiehöhenverluste bekanntlich berechnet mit der Beziehung :

$$\boxed{h_V = \zeta \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g}}$$

Dieses *Quadratgesetz des Strömungswiderstandes* bildet die *eigentliche* Grundlage für die Behandlung reibungsbehafteter Strömungen.

Der kontinuierliche Rohrreibungsverlust kann auch als Folge von Rohrerweiterungen und Rohrverengungen verstanden werden.