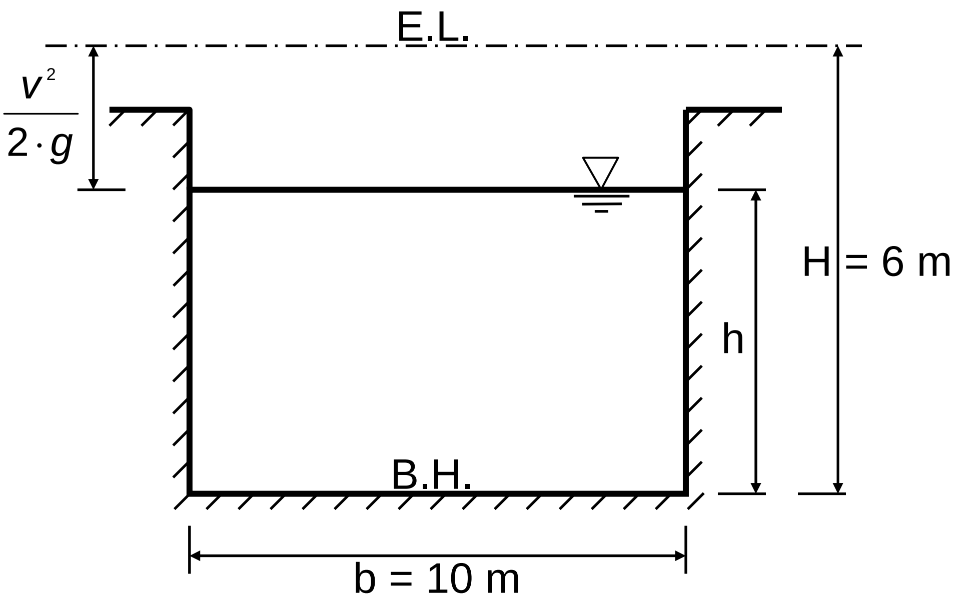
Extremalprinzip

Schießen - Strömen

Energiesatz ohne Reibungsansatz:

Anwendung auf den Fließvorgang in offenen Querschnitten

Es wird nachfolgend ein Freispiegelgerinne mit einem rechteckigen Durchflussquerschnitt A, der Breite b und der Wassertiefe h vorausgesetzt.



Aufgabe:

1. Welchen Betrag hat der Durchfluss Q für die Wassertiefen h = 5 m und h = 3 m?

2. Bei welcher Tiefe h hat Q einen Extremwert?

3. Welche Gestalt hat die Funktion Q = f(h)?

Lösung Aufgabe 1.:

Nach dem Energiesatz ist

$$H = h + \frac{v^2}{2 \cdot g} = \text{konstant} \qquad (1)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} \qquad (2)$$

$$Q = v \cdot A \qquad A = h \cdot b \qquad (3)$$

$$Q = h \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} = f(h) \qquad (4)$$

h in m	Q in m³/s
5	221,47
3	230,16

H = 6 m, b = 10 m, g = 9,81 m/s²

Lösung Aufgabe 2.:

$$Q = h \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} = f(h) \qquad (4)$$

$$\frac{dQ}{dh} = 0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} \cdot b + b \cdot h \cdot \frac{-2 \cdot g}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}} \qquad \Big| \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)}$$

$$2 \cdot g \cdot (H - h) = \frac{2 \cdot g \cdot h}{2} \qquad (5)$$

$$2 \cdot H - 2 \cdot h = h$$

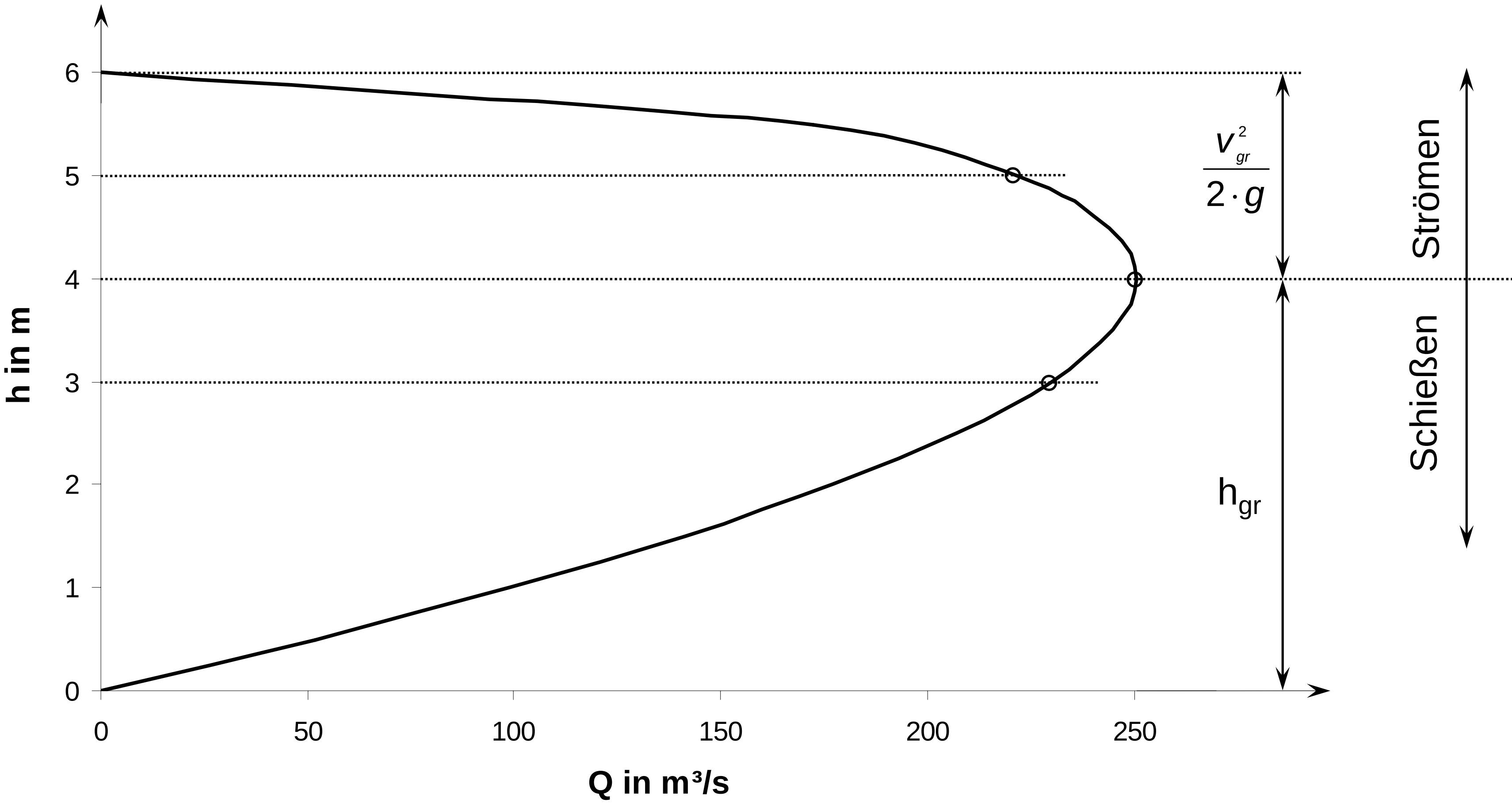
Maximalen Durchfluss bei : $H = \frac{3}{2} h$ bzw. $h = \frac{2}{3} H$ (6)

Mit H = 6 m und b = 10 m erhält man :

$h = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ m $\qquad$ max $Q = 4 \cdot 10 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (6 - 4)} = 250{,}57\ \mathrm{m^3/s}$

Lösung Aufgabe 3.:

Funktion Q = f(h)



Berechnung der Grenztiefe:

Nachfolgend wird H aus der Gleichung (6) in die Gleichung (4) eingesetzt:

$$H = \frac{3}{2} h \qquad (6) \qquad\qquad Q = h \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot (H - h)} = f(h) \qquad (4)$$

$$Q = h \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(\frac{3}{2} h - h \right)}$$

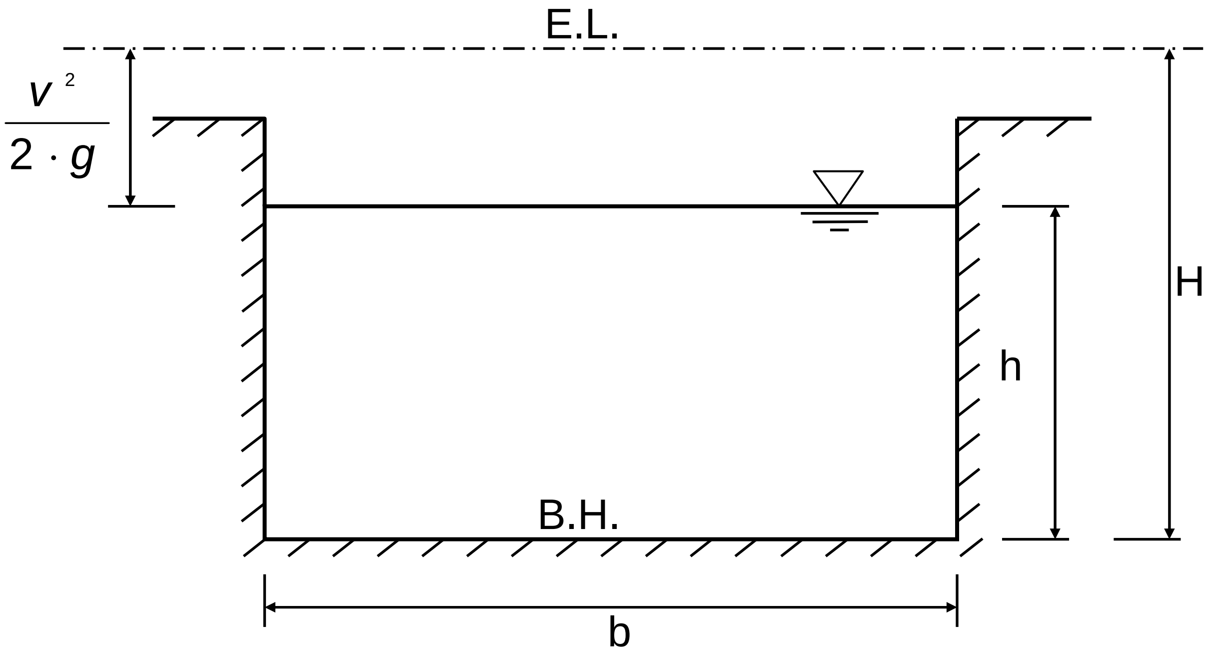
$$Q = h \cdot b \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(\frac{1}{2} h \right)}$$

$$Q^2 = b^2 \cdot h^3 \cdot g$$

Grenztiefe für den Rechteckquerschnitt:

$$\boxed{h_{grenz} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 \cdot g}}} \qquad (7)$$

Extremalprinzip (Schießen - Strömen)



Energiesatz bezüglich des Abflusses durch einen Rechteckquer-schnitt:

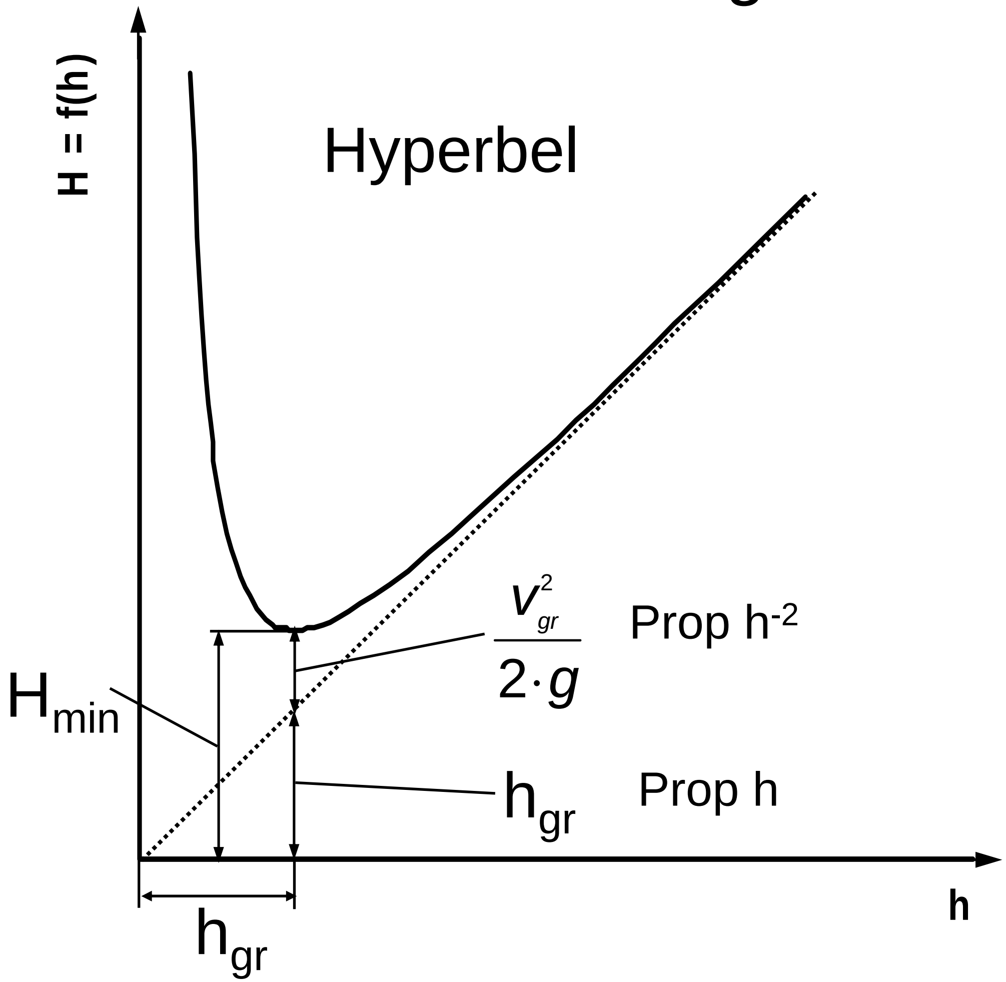
$$H = h + \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (1)$$

$$v = \frac{Q}{b \cdot h}$$

Welche Energiehöhe ${}_{min}H$ ist für einen vorge-gebenen Abfluss Q = konst. mindestens erforderlich ?

$$H = f(h) = h + \frac{Q^2}{b^2 \cdot h^2 \cdot 2g} = h + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot b^2} \cdot h^{-2} \quad (8)$$

$$H = f(h) = h + \frac{Q^2}{b^2 \cdot h^2 \cdot 2g} = h + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot b^2} \cdot h^{-2} \qquad (8)$$



Extremwert:

$$\frac{dH}{dh} = 0 = 1 + \frac{Q^2}{2 \cdot g \cdot b^2} \cdot (-2) \cdot h^{-3}$$

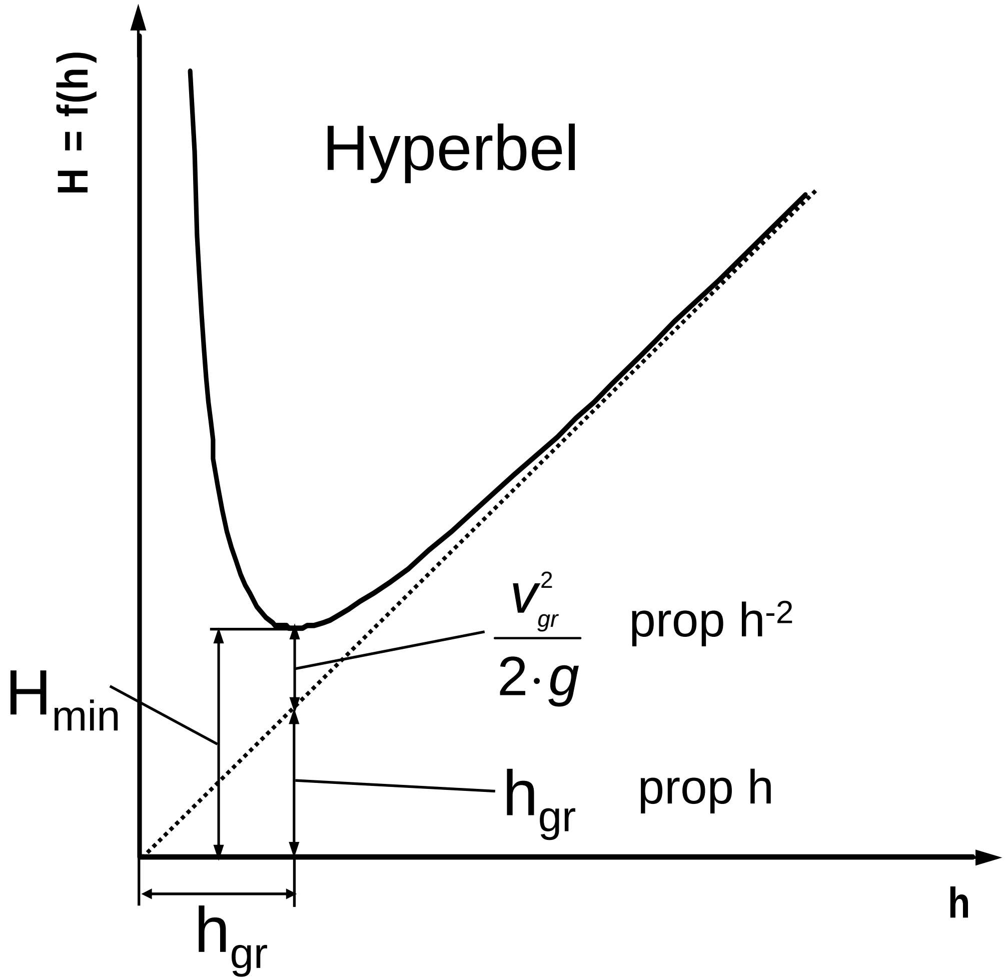
$$\frac{dH}{dh} = 0 = 1 - \frac{Q^2}{g \cdot b^2 \cdot h^3}$$

$$h^3 = \frac{Q^2}{g \cdot b^2}$$

$$h_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g \cdot b^2}} \qquad (7)$$

Grenztiefe

Da 2. Ableitung positiv, liegt Minimum vor!



$$_{\min}H = \frac{3}{2}h_{gr} = h_{gr} + \frac{v_{gr}^2}{2g}$$

Es verhält sich:

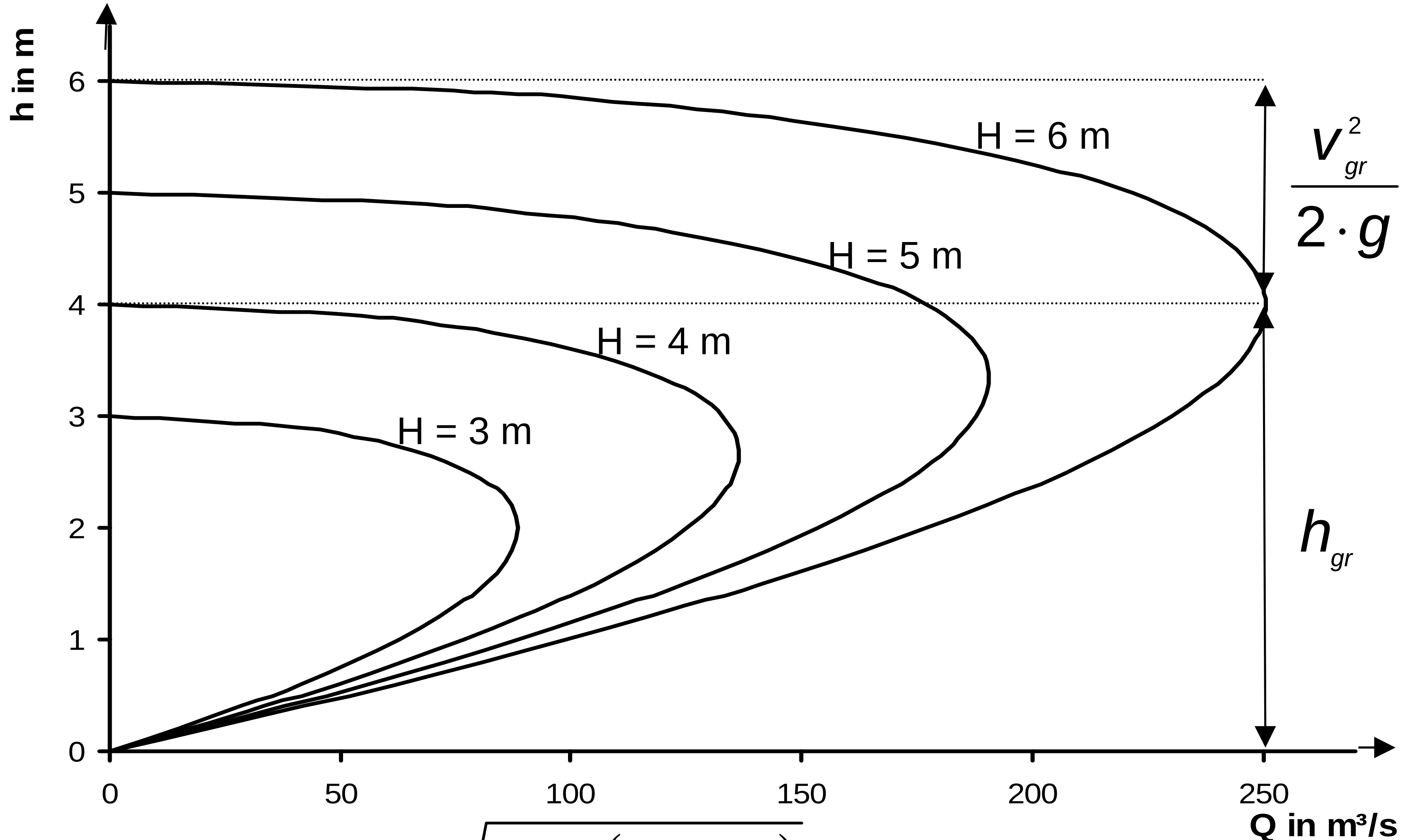
$$\frac{h_{gr}}{v_{gr}^2 / 2g} = \frac{2}{1}$$

$$\boxed{\rightarrow v_{gr} = \sqrt{g \cdot h_{gr}}} \qquad (9)$$

Die FROUDE´sche Zahl ist

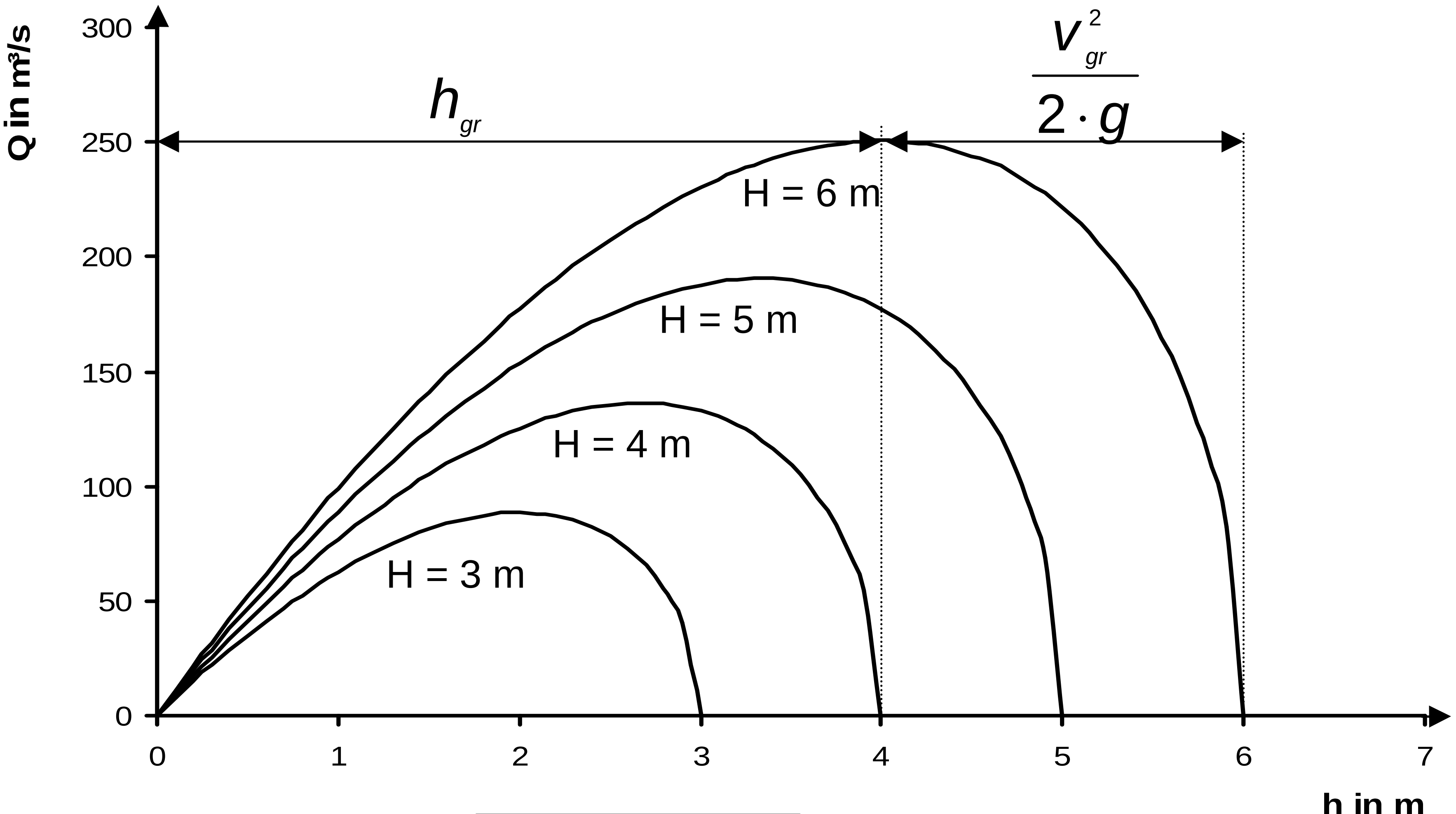
$$Fr = \frac{v}{\sqrt{g \cdot h}} = \frac{v}{c} \qquad (10)$$

Rechteckgerinne, Breite b = 10m, Energiehöhen H_i = 3, 4, 5, 6m



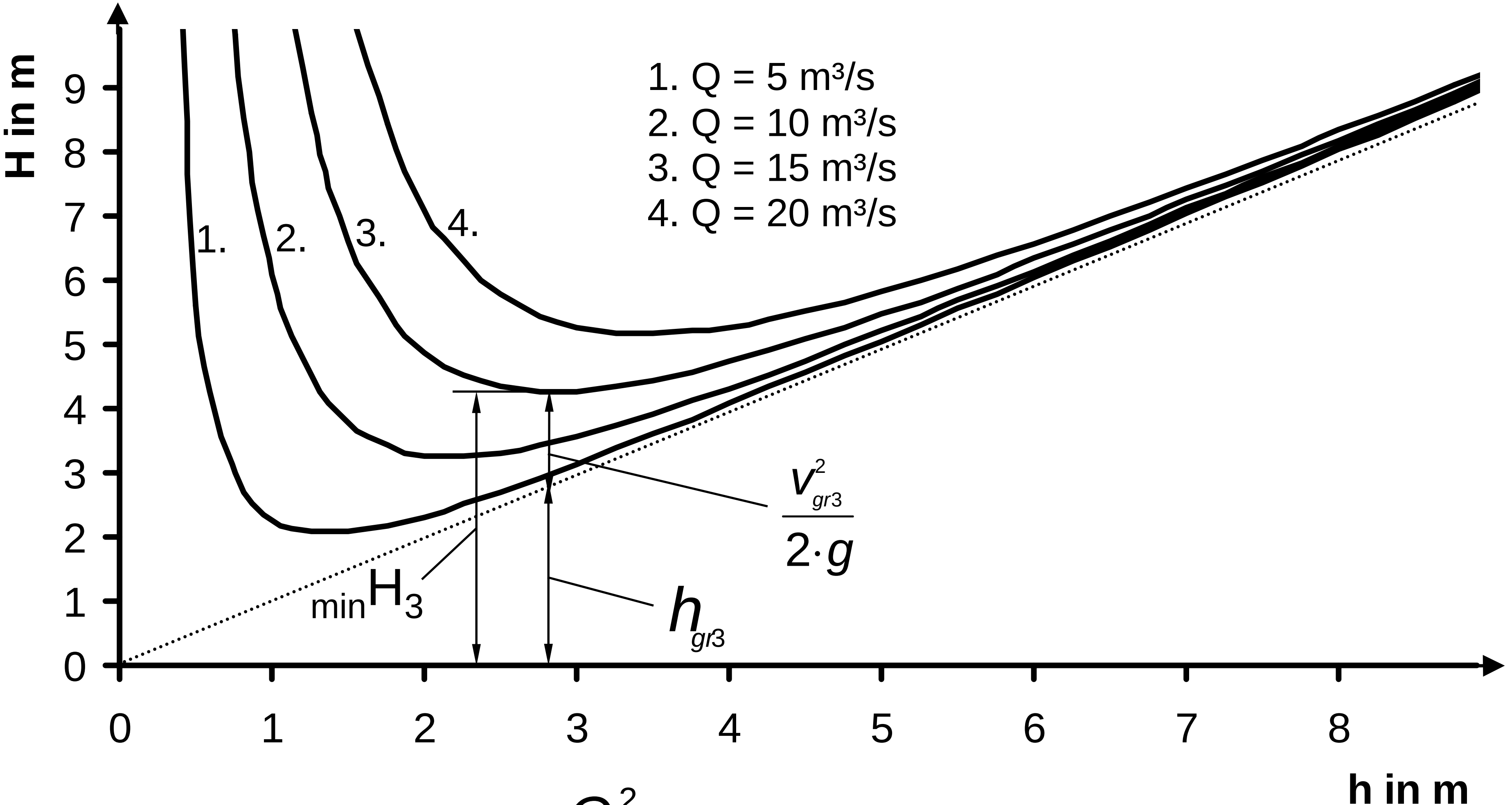
$$Q = f(h) = h \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot (H - h)} \qquad (4)$$

Rechteckgerinne, Breite b = 10m,
Energiehöhen H = 3, 4, 5, 6 m



$$Q = f(h) = h \cdot b \cdot \sqrt{2g \cdot (H - h)} \qquad (4)$$

Rechteckgerinne, Breite b = 10m,
Durchflüsse Q_i = 5, 10, 15, 20 m³/s



$$H = f(h) = h + \frac{Q^2}{2g \cdot b^2 \cdot h^2} \qquad (8)$$

Grenztiefe, Grenzgeschwindigkeit oder die FROUDE´sche Zahl entscheiden über das Vorliegen bestimmter Abflusszustände:

Strömender Abfluss: $h > h_{gr}$ $\quad v < v_{gr}$ $\quad Fr < 1$

Gewellter Abfluss: $h = h_{gr}$ $\quad v = v_{gr}$ $\quad Fr = 1$

Schießender Abfluss: $h < h_{gr}$ $\quad v > v_{gr}$ $\quad Fr > 1$