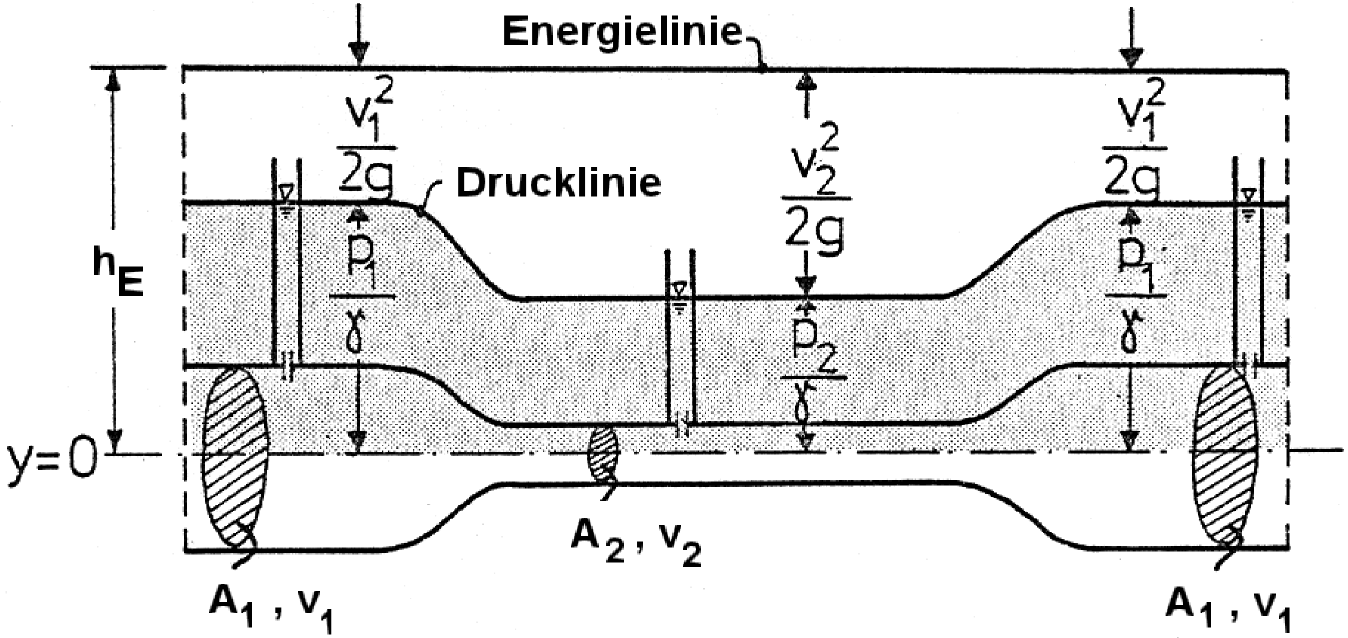
Hydrodynamische Druckspannungsänderungen

Es werden *allmähliche* und *strömungsgünstige* Rohrverengungen bzw. Rohrerweiterungen vorausgesetzt, so dass keine örtlichen Energiehöhenverluste (Wirbel) entstehen.



Da der Bezugshorizont günstig in Höhe der Rohrachse gewählt wurde, sind die Ortshöhen der betrachteten Querschnitte gleich 0.

Die Druckspannungen p_1 und p_2 bzw. die Druckhöhen sind auf die Rohrachse (y = 0) bezogen.

Energiesatz:

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

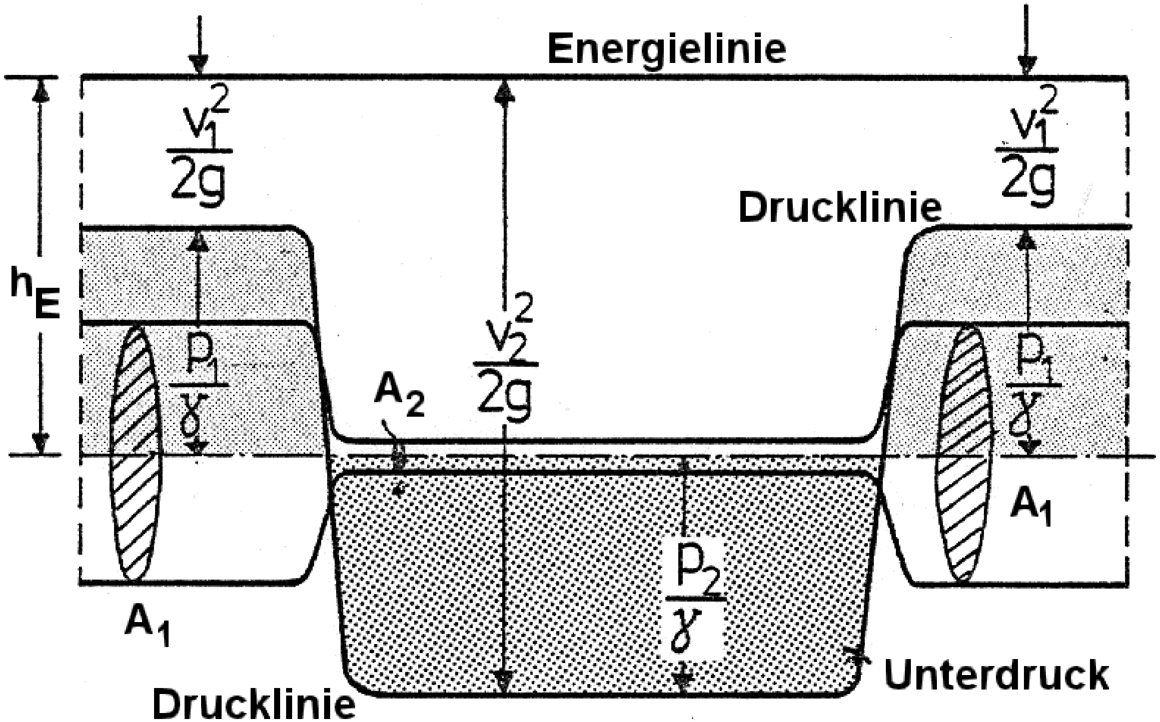
$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{1}{2 \cdot g} \cdot \left(v_1^2 - v_2^2 \right)$$

Wenn $Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$ und $A_1 > A_2$

ist $v_2 = v_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} > v_1$

und damit $p_2 < p_1$ (*Hydrodynamische* Druckabnahme).

In den Standrohren steigt die Flüssigkeit gerade soweit auf, dass ihr Eigengewicht dem Rohrinnendruck das Gleichgewicht hält, d.h., die Entfernungen der *Standrohrspiegel* von der Rohrachse entsprechen der örtlichen Druckhöhe p/γ. Die Verbindungslinie aller Standrohrspiegel stellt die *Drucklinie* dar. Die *Energielinie* liegt um das Maß der Geschwindigkeitshöhe $v^2/2g$ darüber.

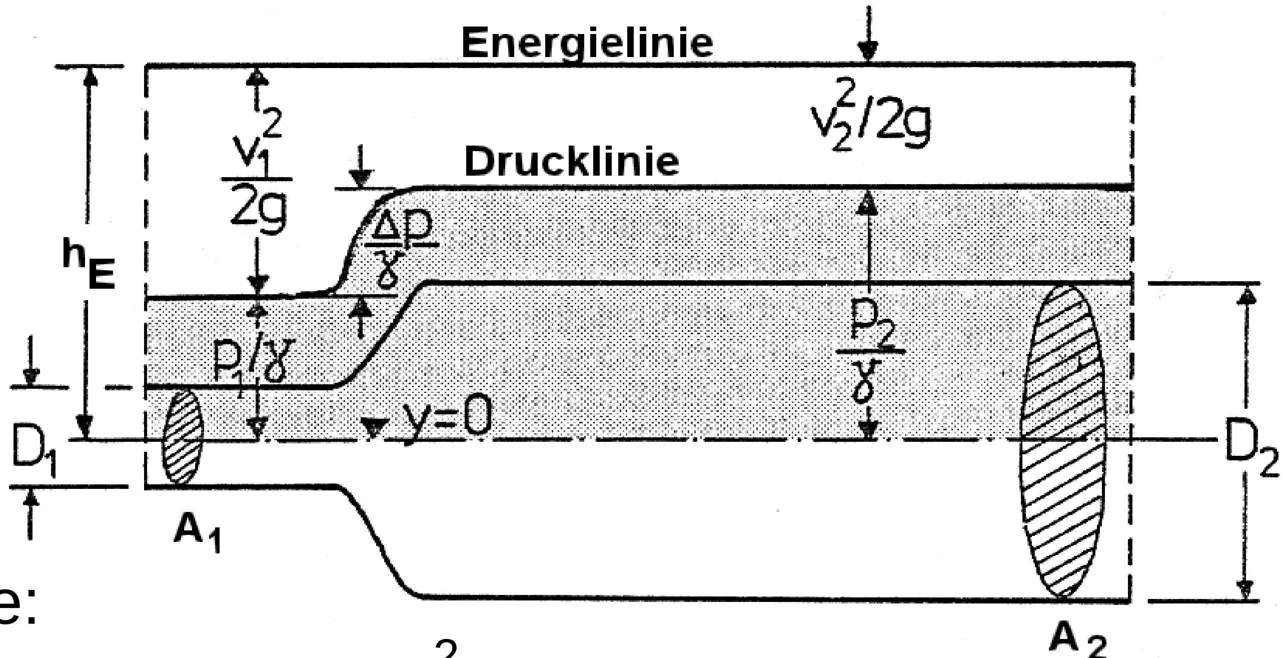


Rohrachse
(= Bezugshorizont)

Bei starker Rohrverengung kann der Innendruck unter den äußeren barometrischen Luftdruck fallen. → Druckhöhe negativ!

Unterdruck ist theoretisch bis zum absoluten Vakuum möglich. Praktisch aber verdampft die Flüssigkeit bei Unterschreiten der *Dampfdruckspannung*. Unterdrücke sollen bei Wasser nicht unter -8 mWS fallen, da sonst die Strömung abreißt und bei anschließendem Druckanstieg *Kavitationsschäden* bei erneuter Kondensation die Folge wären.

Kreisrohr, *Querschnittserweiterung*:



Rohrachse:

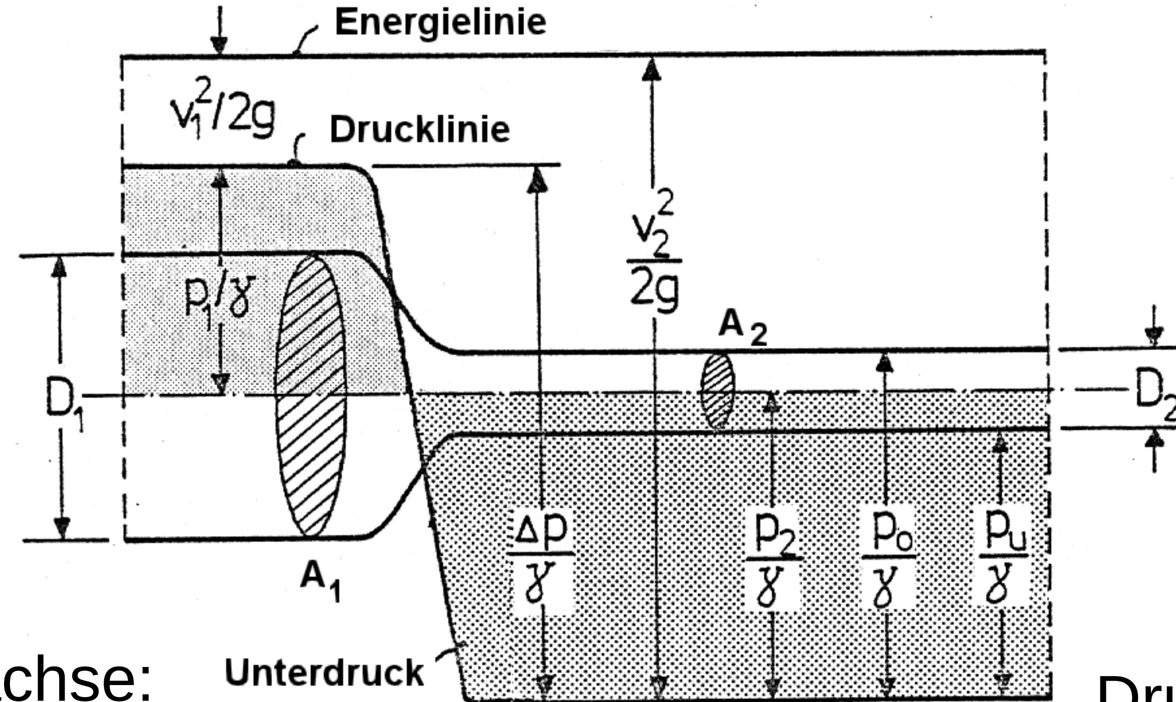
$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2\cdot g} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2\cdot g}$$ (Energiesatz)

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{p_2 - p_1}{\gamma} = \frac{1}{2\cdot g}\cdot\left(v_1^2 - v_2^2\right)$$ mit $Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{Q^2}{2\cdot g}\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)$$ $A_1 = \frac{\pi\cdot D_1^2}{4}$ $A_2 = \frac{\pi\cdot D_2^2}{4}$

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{8\cdot Q^2}{\pi^2\cdot g}\left(\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_2^4}\right)$$ <u>Δp ist positiv</u>, da $D_1 < D_2$. Der Druckanstieg erfolgt mit der Potenz D^{-4}

Kreisrohr, *Querschnittsverengung* mit Unterdruck:



Bezugshorizont

Rohrachse:

Drucklinie

$$\frac{\Delta p}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma} = \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}\left(\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_2^4}\right)$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}\left(\frac{1}{D_1^4} - \frac{1}{D_2^4}\right)$$

Hier ist wegen $D_1 > D_2$ die <u>Druckdifferenz Δp negativ</u>.

Formel wie oben !

Für die obige Querschnittsverengung mit Unterdruck sollen die Druckhöhen bzw. die Druckspannungen an der *Rohrsohle* und am *Rohrscheitel* formal ermittelt werden. Vorausgesetzt wird hier, dass die *Strömungsgeschwindigkeit im Querschnitt konstant* ist.

An der Rohrsohle:

Es wird der Energiesatz bezüglich der Rohrachse (y=0) aufgestellt für einen Punkt auf der *Rohrachse* und einen Punkt der *Sohle*:

$$0 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = -\frac{D}{2} + \frac{p_u}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\boxed{\frac{p_u}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{D}{2} \quad \rightarrow p_u > p_2}$$

Am Rohrscheitel:

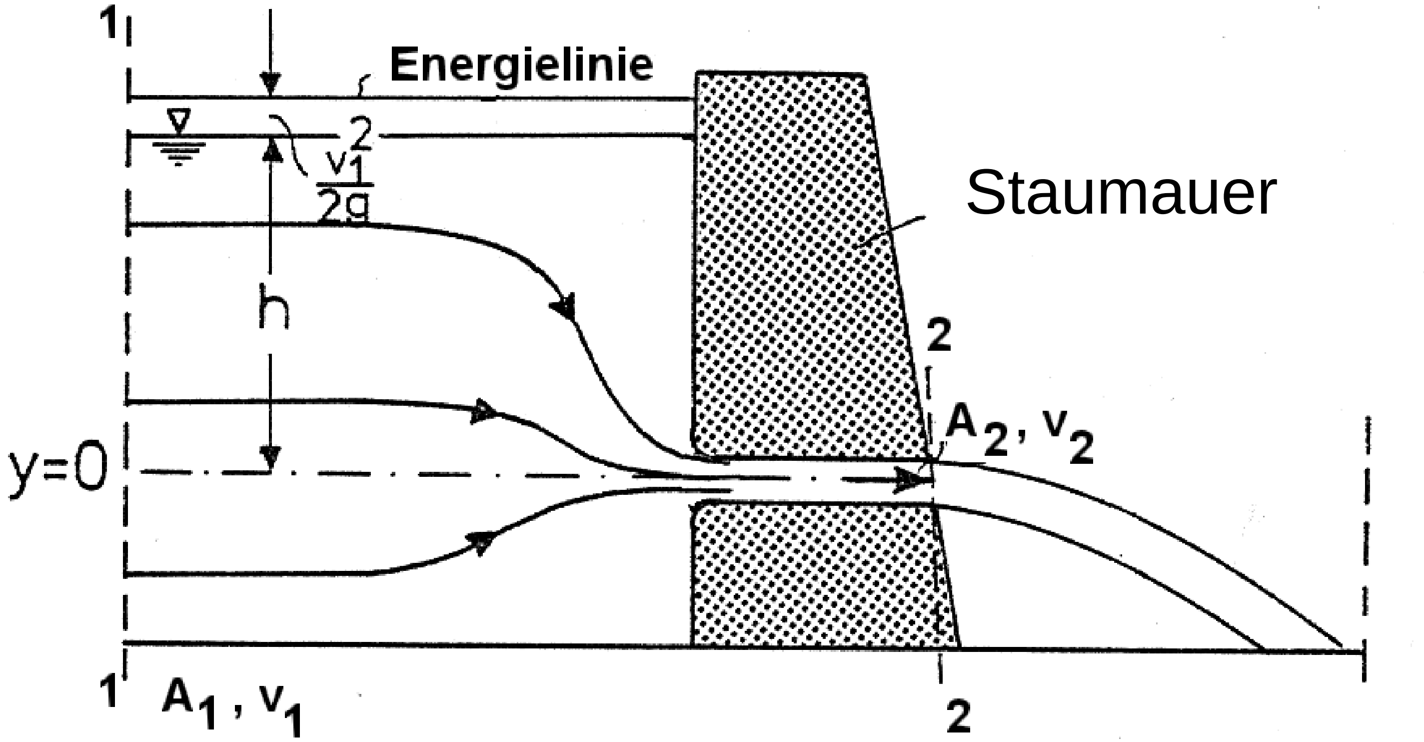
Es wird der Energiesatz bezüglich der Rohrachse (y=0) aufgestellt für einen Punkt auf der *Rohrachse* und einen Punkt des *Scheitels*:

$$0 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = +\frac{D}{2} + \frac{p_o}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

$$\boxed{\frac{p_o}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{D}{2} \quad \rightarrow p_o < p_2}$$

Am Rohrscheitel ist die Gefahr der Kavitation am größten!

Ausflussformel nach TORICELLI:



Die Reibung wird vernachlässigt und der Einlauf des Grundablasses sei gut ausgerundet, damit keine örtlichen Energieverluste auftreten.

Im Kontrollquerschnitt 1-1 ist im Stausee die Durchflussfläche A_1 bekannt und der Ausflussquerschnitt (Querschnitt 2-2) sei A_2.

Der Bezugshorizont y = 0 liegt zweckmäßigerweise auf der Achse des Grundablasses.

Im Kontrollquerschnitt 1-1 bewegen sich alle Wasserteilchen horizontal mit der Geschwindigkeit v_1. Im Querschnitt 2-2 (Unterwasser UW) sollen die Abmessungen klein im Vergleich mit der Wassertiefe h (Druckhöhe) im Oberwasser (OW) sein.
Der Energiesatz bezogen auf y = 0 gilt für <u>jede</u> Stromlinie und auch für die Randstromlinie des Wasserspiegels:

$$h + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

Der Druck im Strahl ist p = 0 !

Freispiegelabfluss im Kontrollquerschnitt 1-1 — Abflussstrahl im Kontrollquerschnitt 2-2

Mit der Kontinuitätsgleichung $Q = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{konst.}$

wird $v_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot v_2$ und damit $h + \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \cdot \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$

$$h + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1\right) = 0$$

$$\frac{v_2^2}{2 \cdot g} = \frac{-h}{\left(\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - 1\right)}$$

Nach v_2 aufgelöst:

$$\boxed{v_2 = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}}$$

Bei den meisten Ausflussberechnungen ist A_2 um Größenordnungen kleiner als A_1, so dass die Anströmgeschwindigkeit v_1 vernachlässigt werden kann.

Dann folgt aus

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

die vereinfachte Formel von TORICELLI $\boxed{v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$

= Fallgeschwindigkeit

Der Durchfluss ist dann

$$\boxed{Q = A \cdot v = A \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$

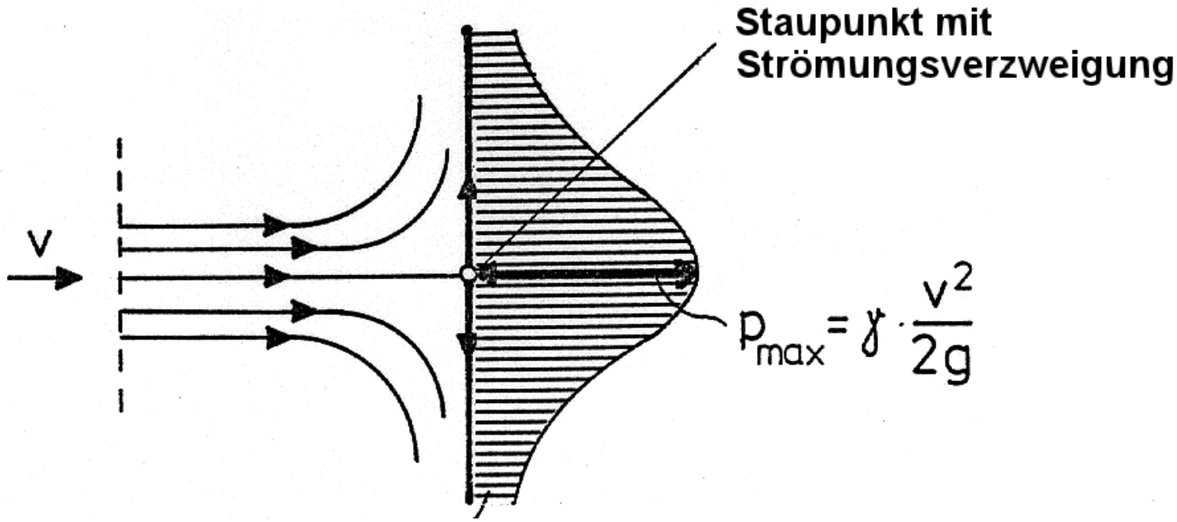
Anmerkung: Die *theoretische* Fallgeschwindigkeit ist in *reibungsfreier* Umgebung für alle Körper gleich, die aus gleicher Höhe h über einem Bezugshorizont fallengelassen werden.

Es ist $E_{pot} = E_{kin}$:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m}{2} \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Staudruck:

Freistrahl



Für die zentrale Stromlinie gilt: $\frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{p}{\gamma}$

Der Staudruck ist dann $\boxed{p = \gamma \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{\rho}{2} \cdot v^2}$

Als *Bezugsgröße* für die Windbelastung bei Bauwerken (DIN V ENV 1992-2-4) wird $\boxed{q_{ref} = \frac{v_{ref}^2}{1600}}$ in kN/m² für Windgeschwindigkeiten $24{,}3 \le v_{ref} \le 32$ m/s

mit $\rho_L \approx \frac{1}{800} \cdot \rho_W$

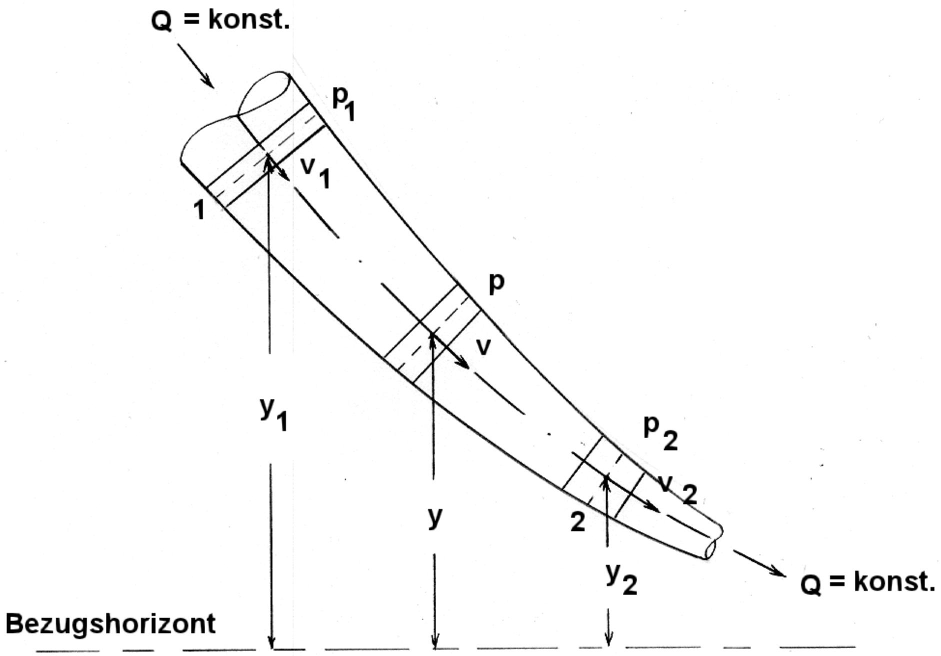
Energiesatz (analytisch):

Bei der Rohrströmung setzt sich die Gesamtenergie aus der *potentiellen Energie* E_{pot}, der *Druckenergie* E_{pr} und der *kinetischen Energie* E_{kin} zusammen.

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot y$$

$$E_{pr} = p \cdot V$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2$$



$$E_{pot} \left[t \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m = kN \cdot m \right]$$

Ein scheibenförmiges Masseteilchen $m = \rho \cdot V$ bewegt sich vom Quernitt 1 zum Querschnitt 2. Seine Gesamtenergie bleibt erhalten.

$$E = E_{pot} + E_{pr} + E_{kin} = \text{konst.}$$

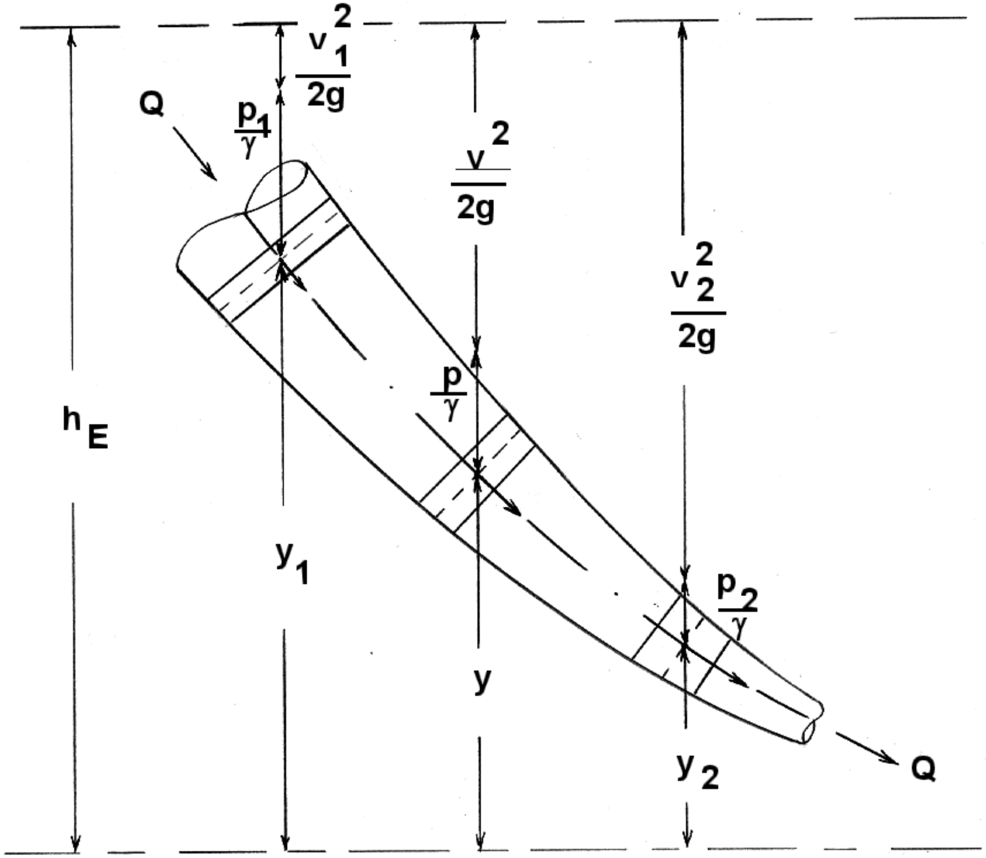
Mit V = m/ρ ergibt sich für die Druckenergie $E_{pr} = p \cdot m/\rho$.

Die Gesamtenergie im Querschnitt 1 ist gleich der Gesamtenergie im Querschnitt 2:

$$m \cdot g \cdot y_1 + m \cdot \frac{p_1}{\rho} + \frac{m}{2} v_1^2 = m \cdot g \cdot y_2 + m \cdot \frac{p_2}{\rho} + \frac{m}{2} v_2^2 \, \Bigg| \, \frac{1}{m \cdot g}$$

Wird diese Gleichung durch die Masse m dividiert, spricht man von der *Bernoulli*schen Gleichung.
Bei Division durch die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ wird wiederum die Höhenform des Energiesatzes erhalten:

$$\boxed{h_E = y_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = y_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} = \text{konst .}}$$

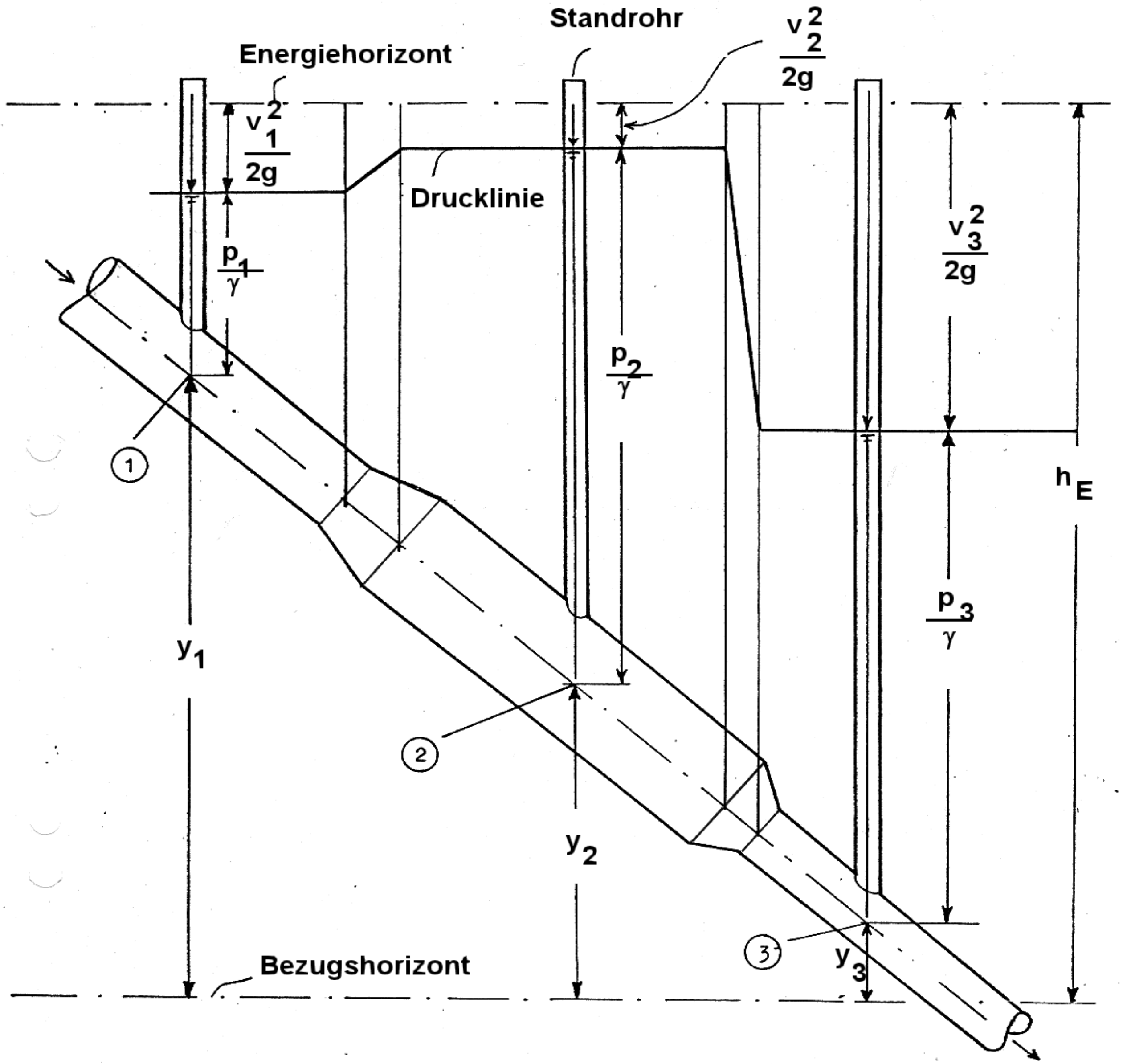


Energielinie

Allgemeine Anordnung:
Die Rohrachse weicht vom Bezugshorizont ab. Hier seien alle Ortshöhen positiv.

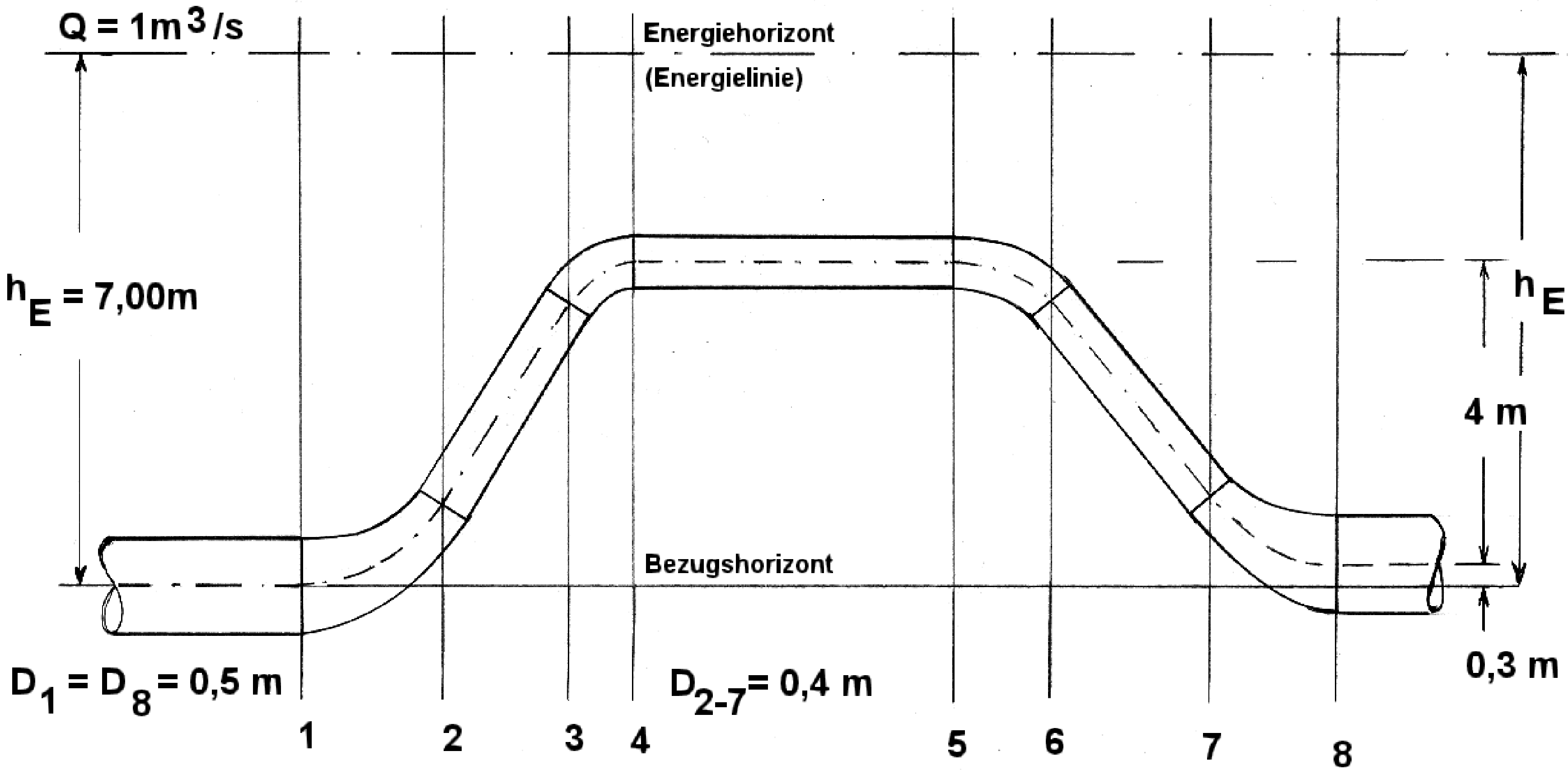
Bezugshorizont

Nimmt in Fließrichtung der Rohrquerschnitt ab, wächst die Geschwindigkeitshöhe auf Kosten der Druckhöhe. Die Druckhöhe kann auch negativ werden.



Die Drucklinie liegt im Abstand $v^2/2g$ unter der Energie-linie.

Bei *konstantem* Rohrdurchmesser sind Energielinie und Drucklinie parallel (und bei reibungssfreier Strömung beide horizontal).



Aufgabe: Bei bekannter Energiehöhe h_E = 7m ist Q = 1m³/s.
Wo liegt die Drucklinie (bei reibungsfreier Strömung)?
Welchen Betrag hat der Druck $p_{4\text{-}5}$ im Scheitelstrang ?

$$h_E = 7\text{m} = y_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2\cdot g} = y_{2-7} + \frac{p_{2-7}}{\gamma} + \frac{v_{2-7}^2}{2\cdot g} = y_8 + \frac{p_8}{\gamma} + \frac{v_8^2}{2\cdot g}$$

$$A_1 = A_8 = \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{4} = 0{,}196 \ m^2$$

$$v_1 = v_8 = \frac{Q}{A_1} = \frac{1}{0{,}196} = 5{,}09 \ \frac{m}{s} \qquad \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{v_8^2}{2 \cdot g} = 1{,}322 \ m$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = h_E - \frac{v_1^2}{2 \cdot g} - 0 = 7{,}0\,m - 1{,}322 \ m = 5{,}678 \ m$$

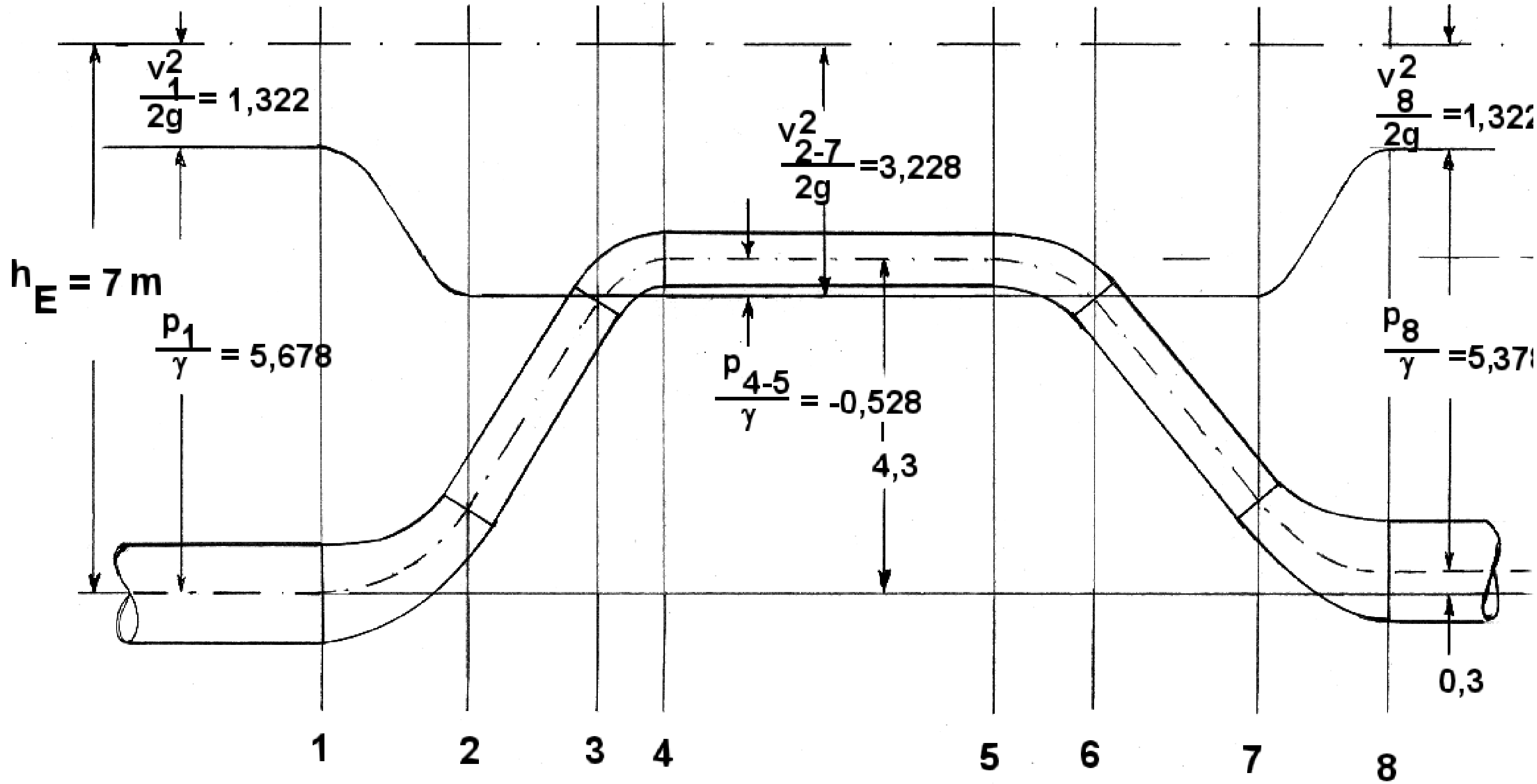
$$\frac{p_8}{\gamma} = h_E - \frac{v_8^2}{2 \cdot g} - y_8 = 7{,}0 - 1{,}322 - 0{,}3 = 5{,}378 \ m$$

$$A_{2-7} = \frac{\pi \cdot D_{2-7}^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0{,}4^2}{4} = 0{,}126\,m^2$$

$$v_{2-7} = \frac{Q}{A_{2-7}} = \frac{1}{0{,}126} = 7{,}958 \ \frac{m}{s} \qquad \frac{v_{2-7}^2}{2 \cdot g} = 3{,}228 \ m$$

$$\frac{p_{2-7}}{\gamma} = h_E - \frac{v_{2-7}^2}{2 \cdot g} - y_{2-7}$$

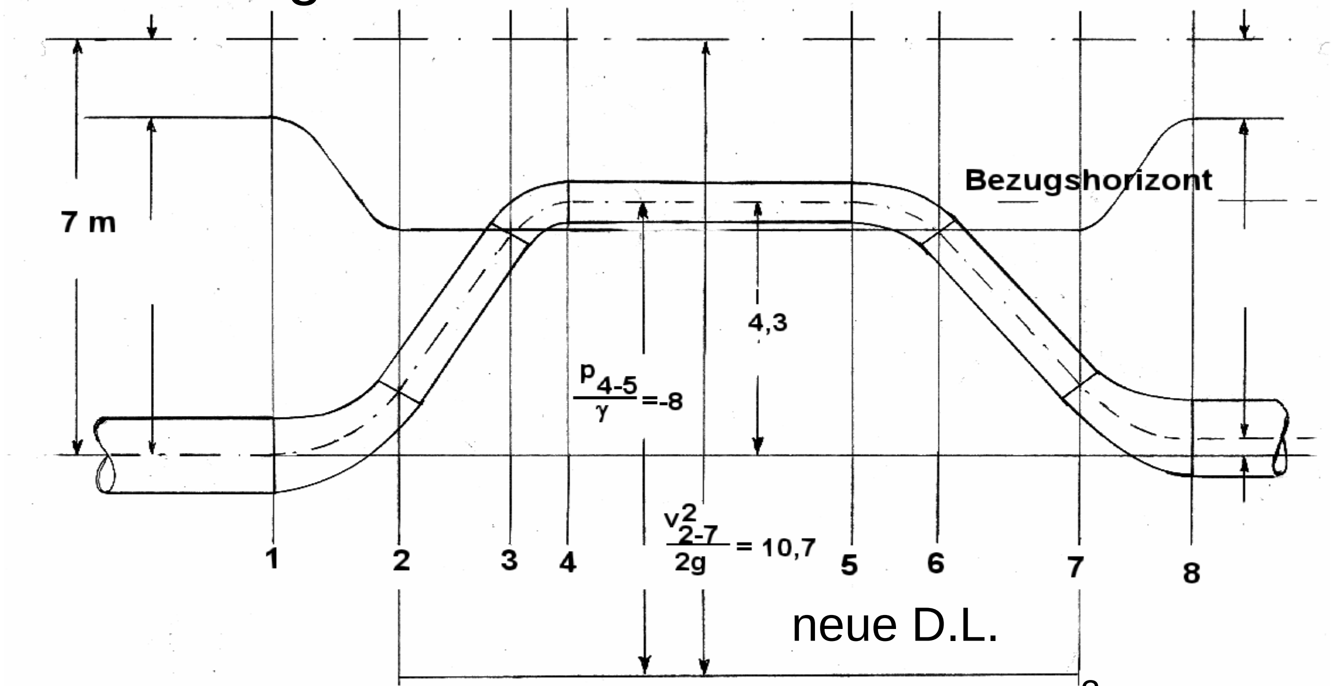
$$\frac{p_{4-5}}{\gamma} = h_E - \frac{v_{2-7}^2}{2 \cdot g} - y_{4-5} = 7 - 3{,}228 - 4{,}3 = -0{,}528\,m$$



Der Druck im Scheitelstrang ist negativ, d.h., kleiner als der barometrische Außendruck: $p_{4-5} = \gamma \cdot (-0{,}528) = -5{,}28\,\text{kN}/\text{m}^2$

Wie groß darf Q maximal werden, damit Kavitation im Scheitelstrang vermieden wird, d.h., die Druckhöhe $p_{4-5} > -8$ m ?

Der Bezugshorizont kann in den Rohrscheitel verlegt werden:

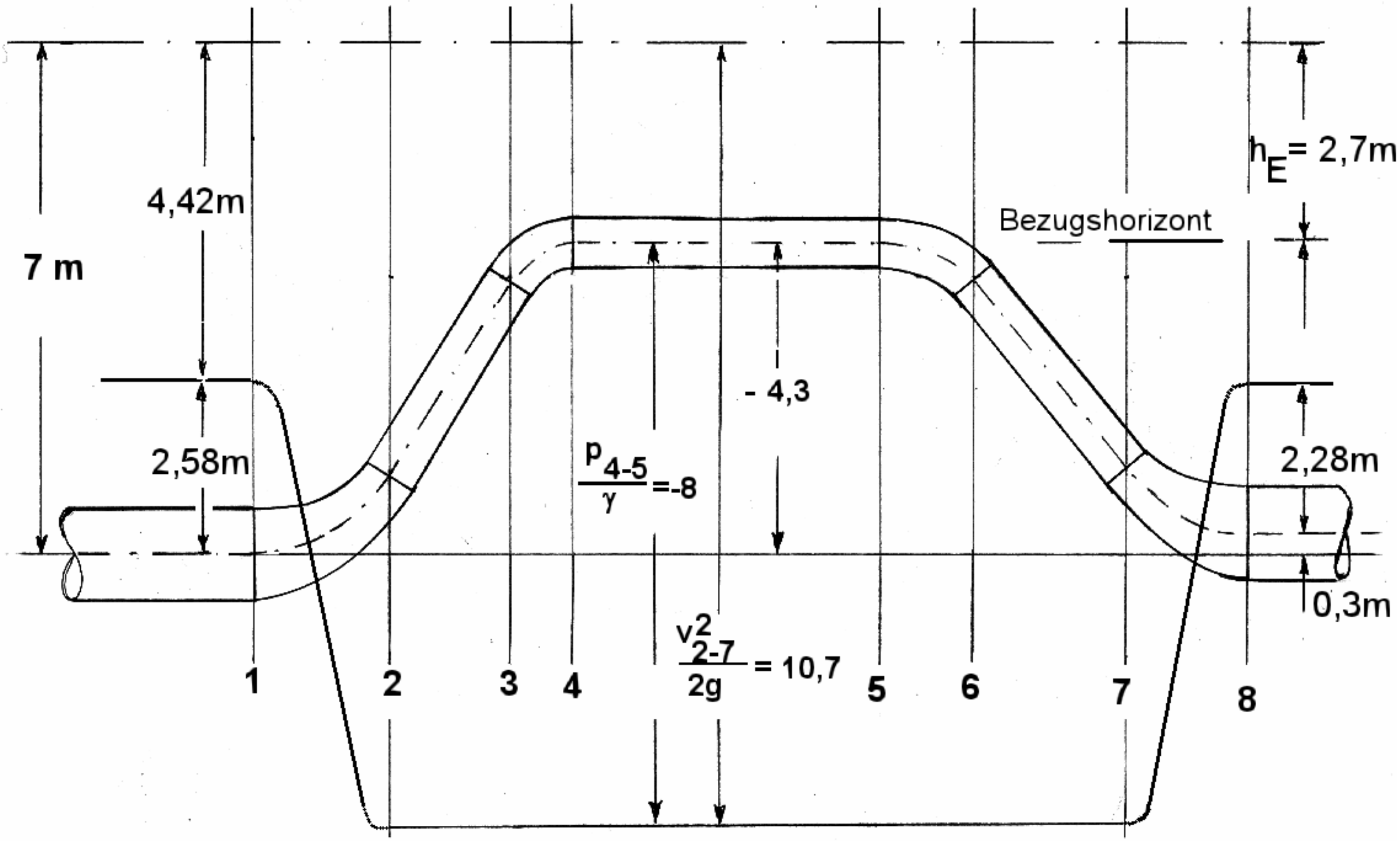


$$h_E = 7{,}0 - 4{,}3 = 2{,}7\,m = y_{4-5} + \frac{p_{4-5}}{\gamma} + \frac{v_{4-5}^2}{2 \cdot g} = 0 - 8{,}0 + \frac{v_{4-5}^2}{2 \cdot g}$$

$$v_{4-5} = \sqrt{2 \cdot g \cdot 10{,}7} = 14{,}489\,m/s$$

$$Q \leq A_{4-5} \cdot v_{4-5} = 0{,}126 \cdot 14{,}489 = 1{,}826\,m^3/s$$

Wie verändert sich die Drucklinie für Rohrstränge 1 und 8 ?
Überprüfen Sie die Ergebnisse unter Verwendung anderer Bezugshorizonte.

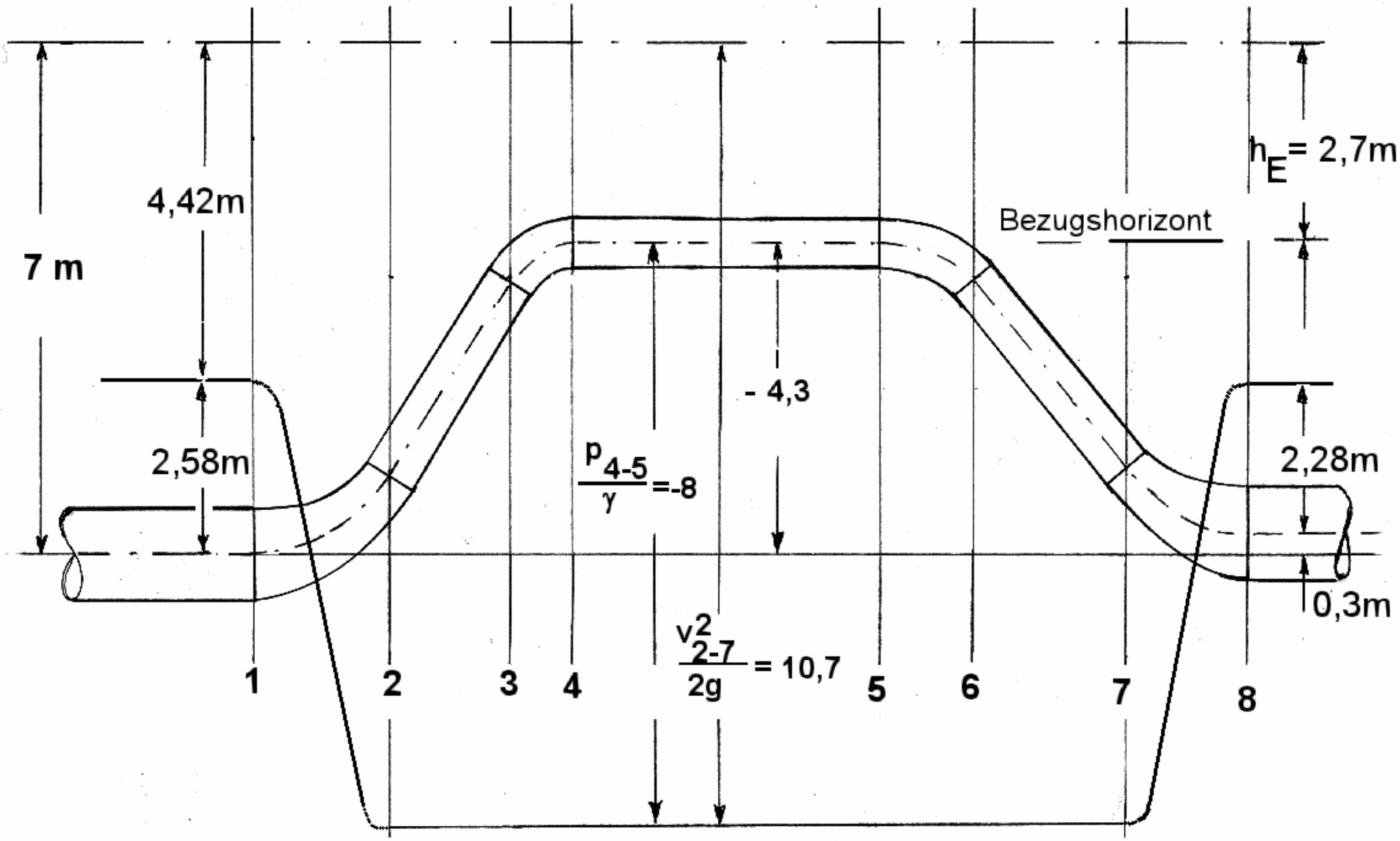


$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = v_8 = \frac{Q}{A_8} = \frac{1{,}826}{0{,}196} = 9{,}316\, m/s$$

$$h_E = 2{,}7 = -4{,}3 + \frac{p_1}{\gamma} + 4{,}42 \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} = 2{,}58m$$

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{v_8^2}{2 \cdot g} = 4{,}42\, m$$

$$h_E = 2{,}7 = -4{,}0 + \frac{p_8}{\gamma} + 4{,}42 \rightarrow \frac{p_8}{\gamma} = 2{,}28m$$



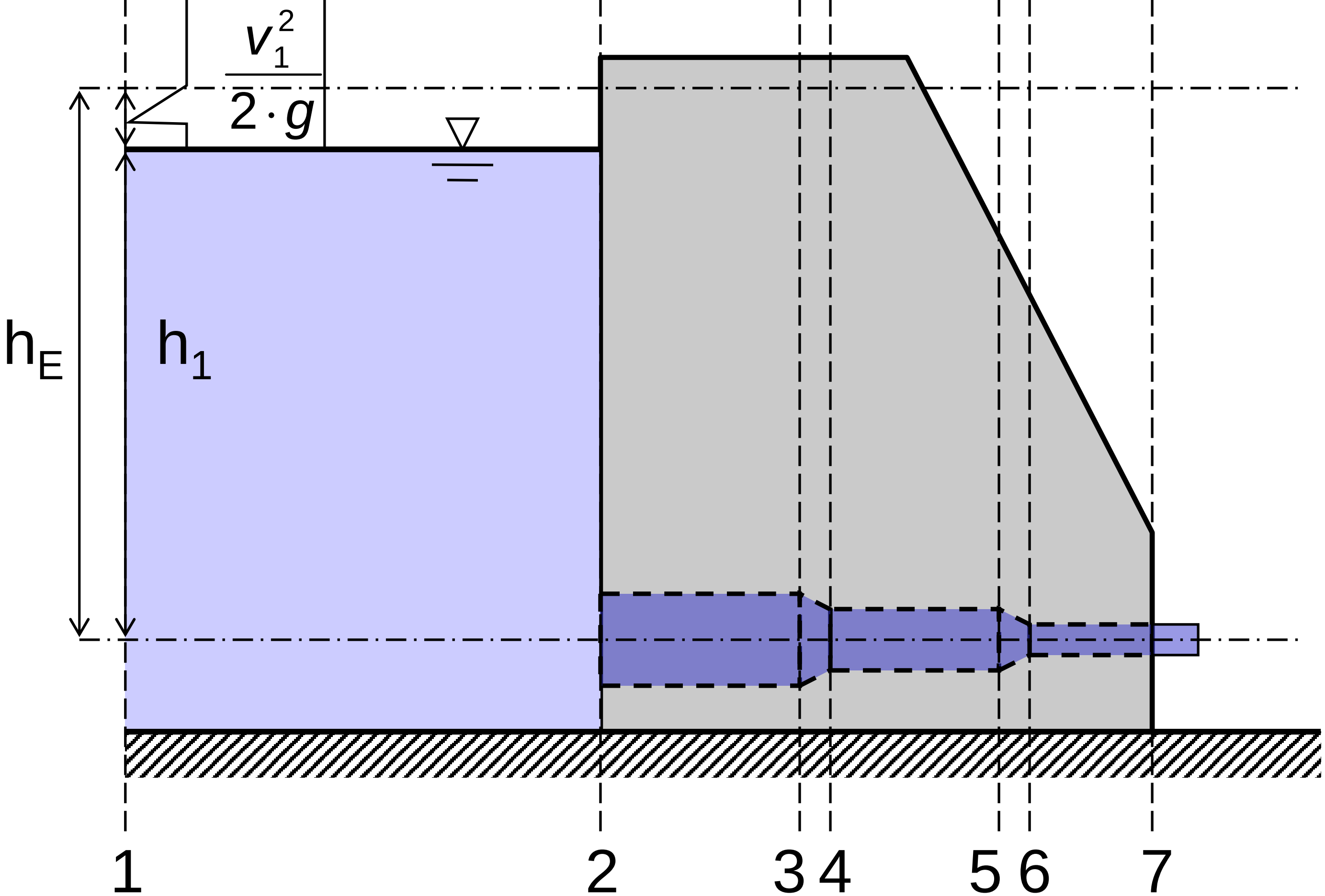
Alternativ Bezugshorizont wiederum durch unterste Rohrachse:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = v_8 = \frac{Q}{A_8} = \frac{1{,}826}{0{,}196} = 9{,}316\, m/s$$

$$h_E = 7{,}0 = 0 + \frac{p_1}{\gamma} + 4{,}42 \rightarrow \frac{p_1}{\gamma} = 2{,}58 m$$

$$\frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{v_8^2}{2 \cdot g} = 4{,}42\, m$$

$$h_E = 7{,}0 = 0{,}3 + \frac{p_8}{\gamma} + 4{,}42 \rightarrow \frac{p_8}{\gamma} = 2{,}28 m$$



unmaßstäblich !

Aufgabe:
Staumauer mit Grundablass reibungsfrei.

gegeben:

$h_1 = 50m$

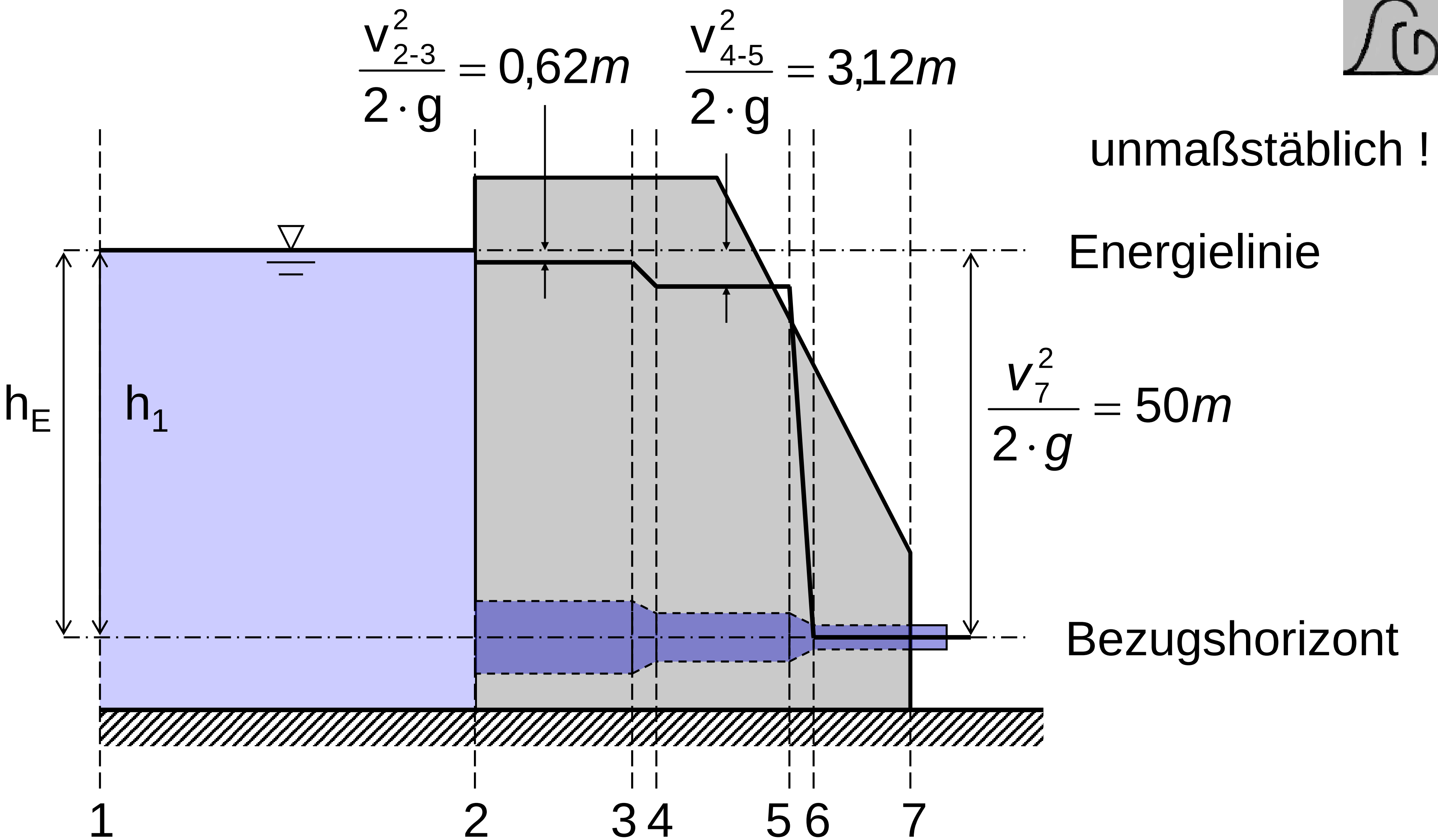
$D_{2\text{-}3} = 0{,}3m$

$D_{4\text{-}5} = 0{,}2m$

$D_{6\text{-}7} = 0{,}1m$

gesucht: Ausfluss Q [m^3/s] und die Drucklinie.

In großen Behältern wird die Zuströmgeschwindigkeit v_1 vernachlässigt !



$$h_E = y_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = y_7 + \frac{p_7}{\rho \cdot g} + \frac{v_7^2}{2 \cdot g} = konst\,.$$

$$h_1 + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{v_7^2}{2 \cdot g}$$

$$50 + 0 = \frac{v_7^2}{2 \cdot g}$$

$$\rightarrow v_7 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 50} = 31{,}32 m/s$$ (TORICELLI)

$$Q = v_7 \cdot A_7 = 31{,}32 \cdot \frac{\pi \cdot D_7^2}{4} = 31{,}32 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} = 0{,}246 m^3/s$$

Drucklinie:

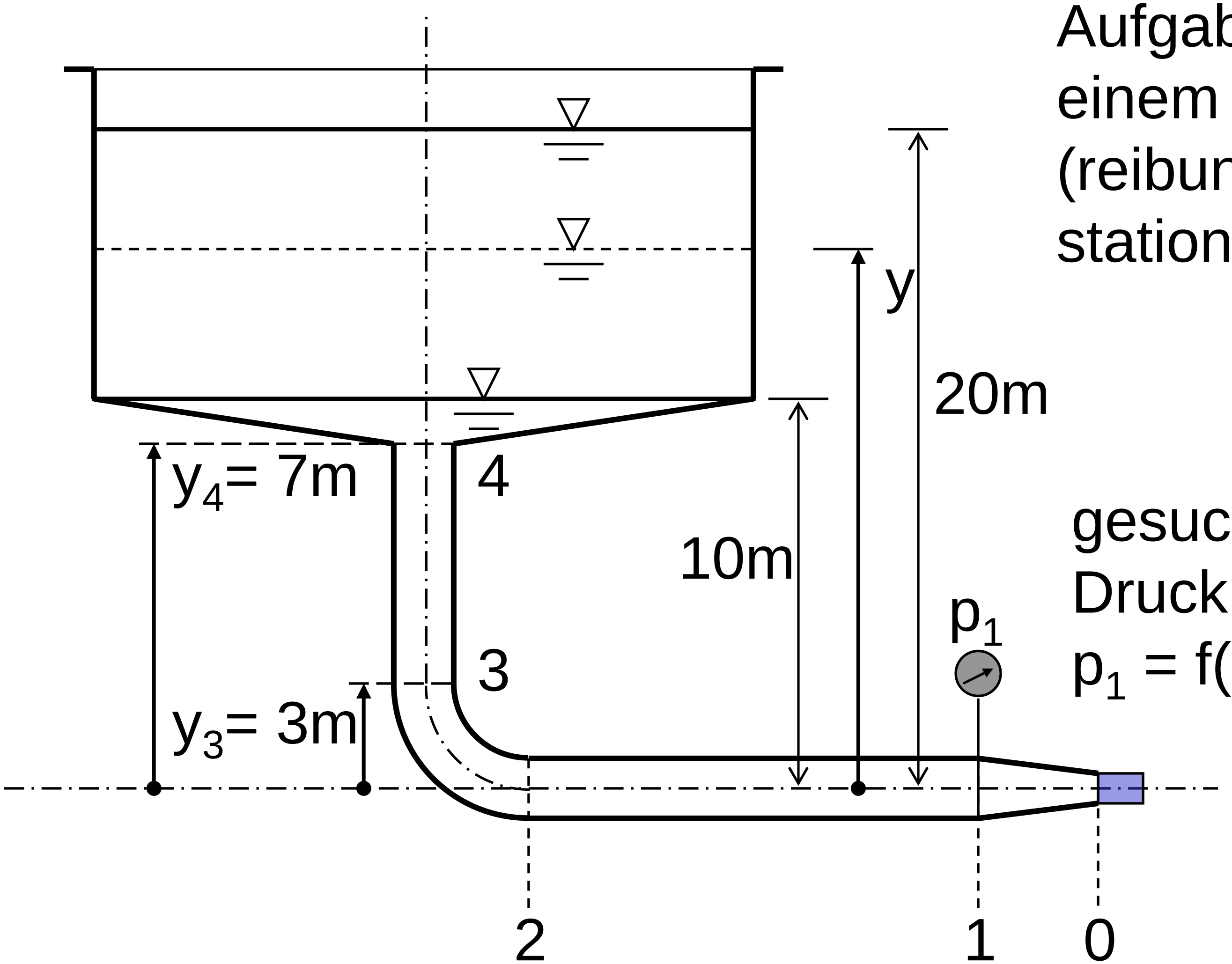
$$Q = v_{6-7} \cdot A_{6-7} = v_{2-3} \cdot A_{2-3} = v_{4-5} \cdot A_{4-5}$$

$$v_{4-5} \cdot \frac{\pi \cdot D_{4-5}^2}{4} = v_{6-7} \cdot \frac{\pi \cdot D_{6-7}^2}{4}$$

$$v_{4-5} = \frac{D_{6-7}^2}{D_{4-5}^2} \cdot v_{6-7} = \frac{0{,}1^2}{0{,}2^2} \cdot 31{,}32 = 7{,}83 m/s$$ $$\frac{v_{4\text{-}5}^2}{2 \cdot g} = 3{,}12 m$$

$$v_{2-3} = \frac{D_{6-7}^2}{D_{2-3}^2} \cdot v_{6-7} = \frac{0{,}1^2}{0{,}3^2} \cdot 31{,}32 = 3{,}48 m/s$$ $$\frac{v_{2\text{-}3}^2}{2 \cdot g} = 0{,}62 m$$

Aufgabe: Ausfluss aus einem Behälter (reibungsfrei, quasistationär).



gegeben:

$A_{1\text{-}4} = 0{,}2 m^2$

$A_0 \quad = 0{,}1 m^2$

gesucht:

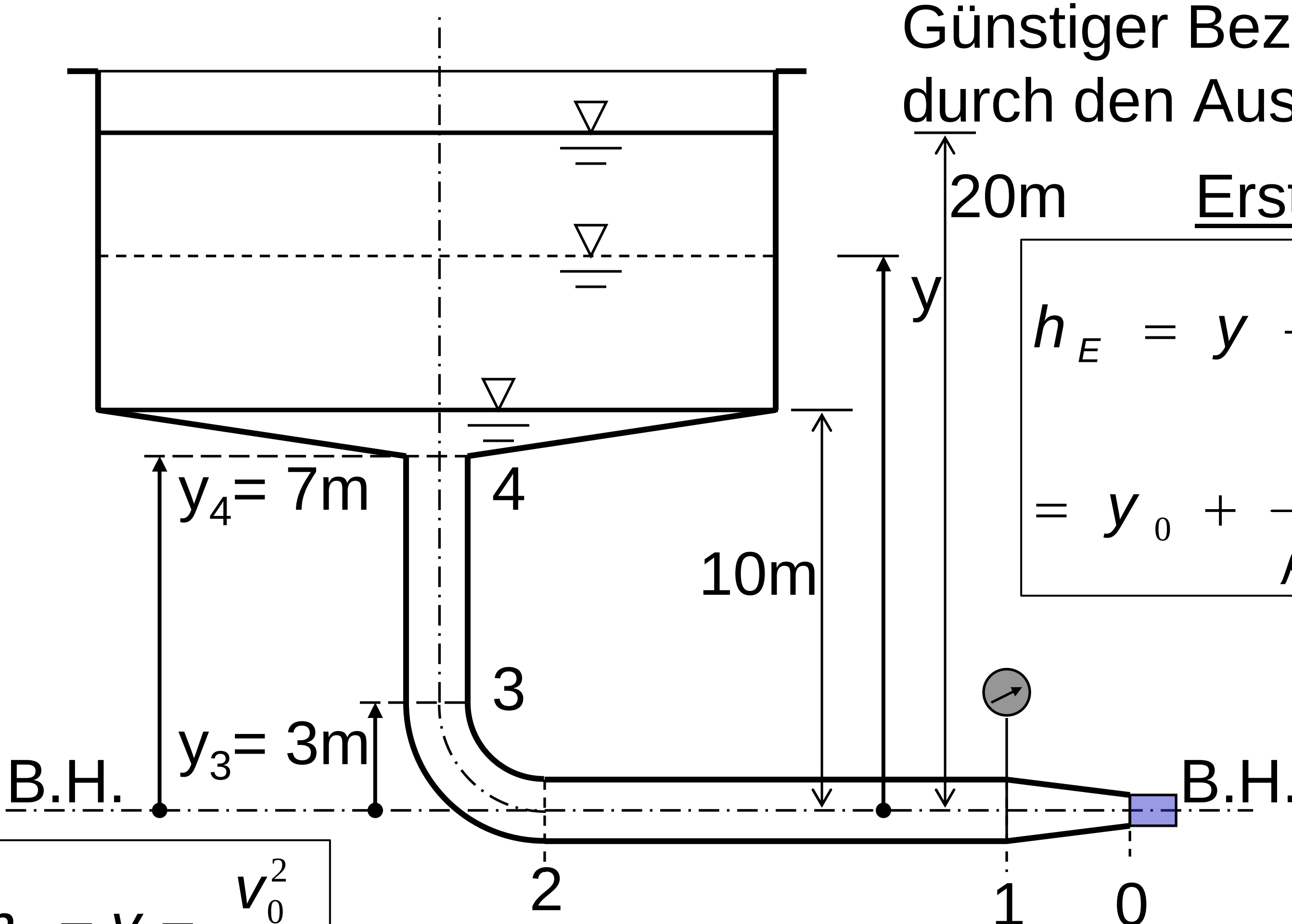
Drucklinie für y = 15m;

$p_1 = f(y)$

Der Durchströmquerschnitt des Behälters ist groß: $v(y) \rightarrow 0$!

Quasistationär: Es sollen nur Durchflusszustände bei *festen* Wasserständen y untersucht werden und nicht etwa der Ausflussvorgang über der Zeit !

Günstiger Bezugshorizont: durch den Auslassquerschnitt.



Erster E-Satz:

$$h_E = y + \frac{p_{(y)}}{\rho \cdot g} + \frac{v_{(y)}^2}{2 \cdot g}$$

$$= y_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

Hier sind:

$p_{(y)} = p_0 = 0$,

$v_{(y)} = 0$

$y_0 = 0$

$$\boxed{h_E = y = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}}$$ (Toricelli)

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot g \cdot y}$$

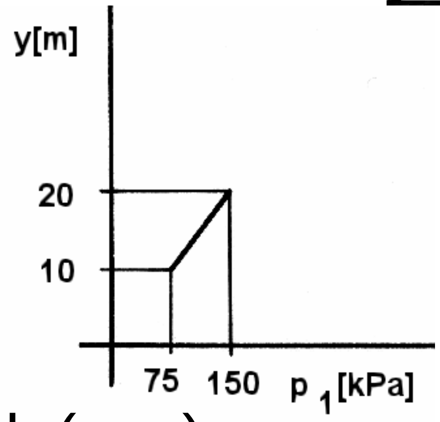
$$Q = v_0 \cdot A_0 = v_1 \cdot A_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{A_0}{A_1} \cdot v_0$$

($v_1 = 0{,}5 \cdot v_0$,vergl. oben)

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

(Zweiter E-Satz)

$$p_1 = \gamma \cdot \frac{v_0^2 - v_1^2}{2 \cdot g} = \gamma \, \frac{2 \cdot g \cdot y - \left(\frac{A_0}{A_1} \right)^2 \cdot 2 \cdot g \cdot y}{2 \cdot g}$$



$$p_1 = \gamma \cdot y \cdot \left(1 - \left(\frac{A_0}{A_1} \right)^2 \right) = 0{,}75 \cdot \gamma \cdot y$$

= dynamischer Druck

< hydrostatischer Druck ($\gamma \cdot y$)

<u>Drucklinie für y = 15m:</u>

$$y_i + \frac{p_i}{\gamma} + \frac{v_i^2}{2 \cdot g} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

<u>Dritter E-Satz</u> (*allgemein*) jeweils bezüglich Stelle 0 und den Stellen i = 1, 2, 3 und 4.

$$\frac{p_i}{\gamma} = \frac{v_0^2 - v_i^2}{2 \cdot g} - y_i \qquad y_1 = y_0 = y_2 = 0 \qquad y_3 = 3\,m \qquad y_4 = 7\,m$$

(s.o.)

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} = 0{,}75 \cdot 15 = 11{,}25\ m$$

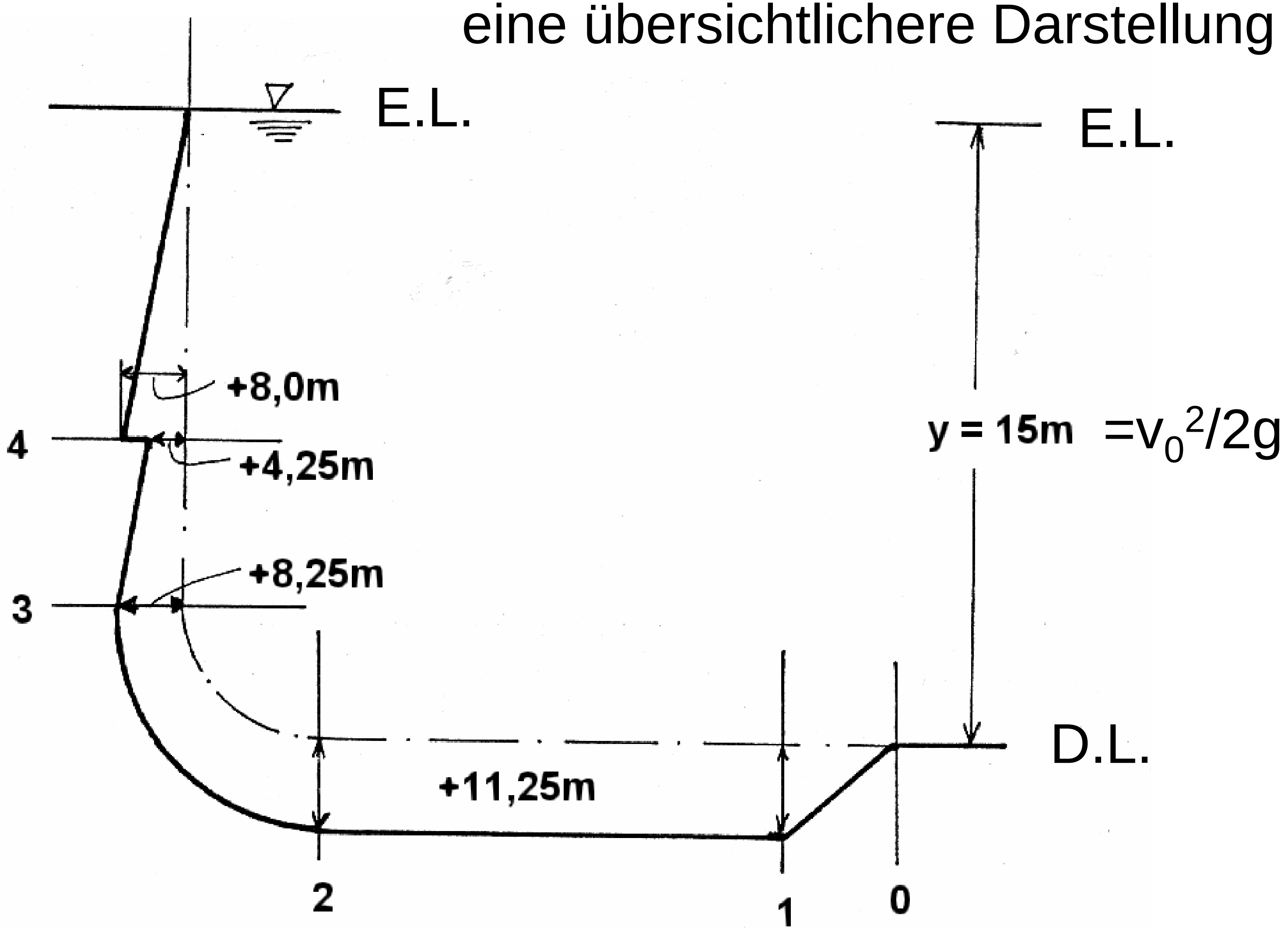
$$\frac{p_3}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} - y_3 = 11{,}25 - 3 = 8{,}25\ m$$

$$\frac{p_4}{\gamma} = \frac{p_1}{\gamma} - y_4 = 11{,}25 - 7 = 4{,}25\ m$$

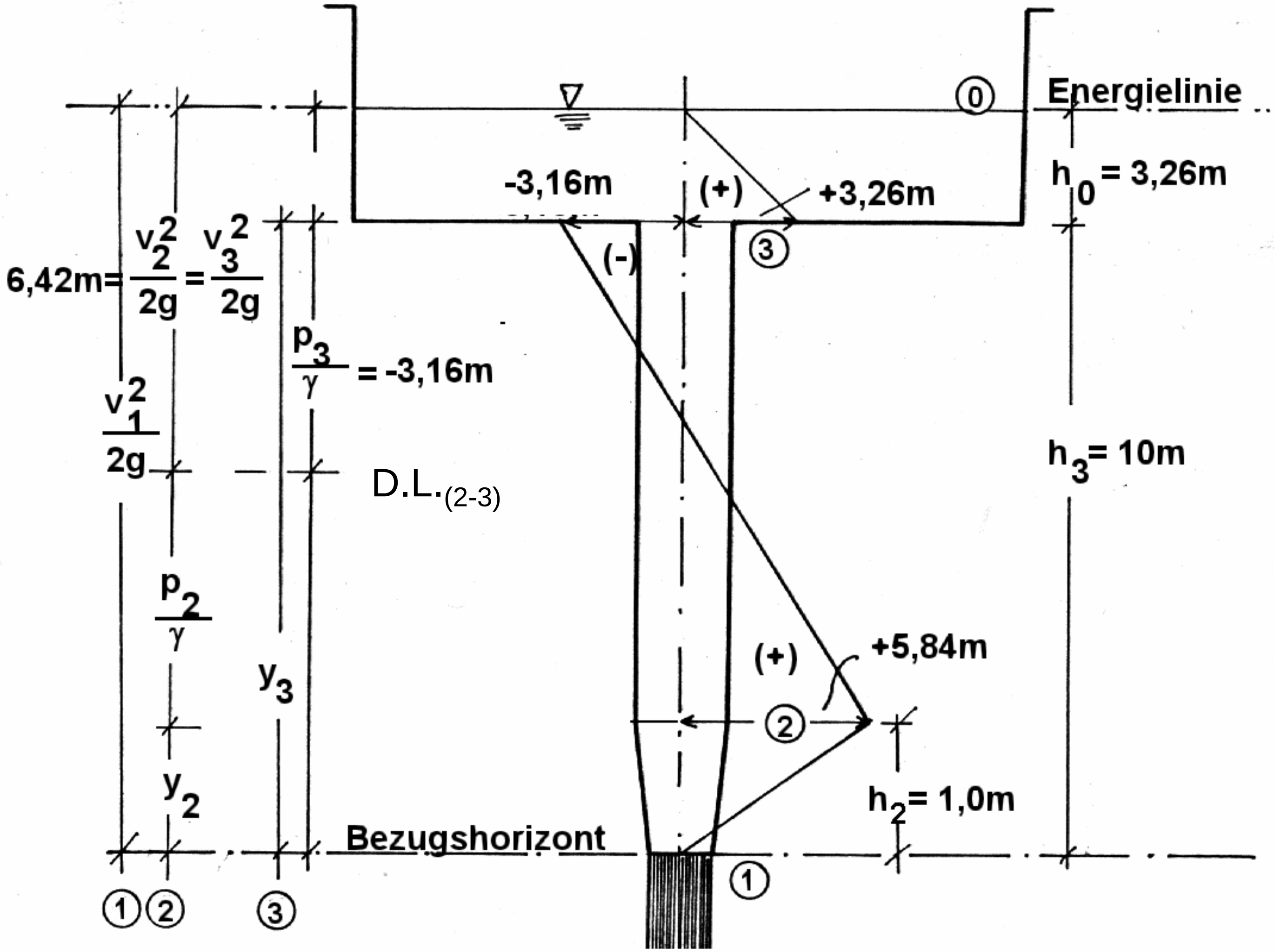
$$\boxed{\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2 \cdot g \cdot 15} = 17{,}155\, m/s \\ v_1 &= 0{,}5 \cdot v_0 = 8{,}577\, m/s \\ \frac{v_1^2}{2 \cdot g} &= 3{,}75\, m \end{aligned}}$$

Drucklinie für y = 15m

Hier ergibt die Auftragung der Druckhöhen *über der Rohrachse* eine übersichtlichere Darstellung !



(Für die Stellen i = 1 bis 4 ist v_i = konst. und die D.L. liegt um $v_i^2/2g$ = 3,75m unter der E.L.)



gegeben:
$D_1 = 0{,}1m$,
$D_2 = 0{,}12m$
$D_3 = 0{,}12m$
$h_0 = 3{,}26m$
$h_2 = 1{,}00m$
$h_3 = 10{,}0m$

Aufgabe: Quasistationärer Ausfluss (reibungsfrei) aus einem Hochbehälter mit großer Oberfläche.

gesucht: Piezometerlinie (= Drucklinie)

$$\boxed{h_E = y_0 + \frac{p_0}{\rho \cdot g} + \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = y_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = konst\,.}$$

$$y_0 = h_0 + h_3 = 13{,}26\,m = h_E$$

$v_0 = 0 \quad p_0 = p_1 \quad y_1 = 0$

$$y_0 = \frac{v_1^2}{2 \cdot g} \rightarrow v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot y_0} = 16{,}13\,m/s$$

$$Q = v_1 \cdot A_1 = 16{,}13 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}1^2}{4} = 0{,}127\,m^3/s$$

$$v_2 = v_3 = \frac{Q}{\frac{\pi \cdot 0{,}12^2}{4}} = 11{,}23\,m/s$$

$$\frac{v_2^2}{2 \cdot g} = \frac{v_3^2}{2 \cdot g} = \frac{11{,}23^2}{19{,}62} = 6{,}42\mathrm{m}$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = 13{,}26 - 1 - 6{,}42 = 5{,}84\,m$$

$$\frac{p_3}{\gamma} = 13{,}26 - 10 - 6{,}42 = -3{,}16\,m$$