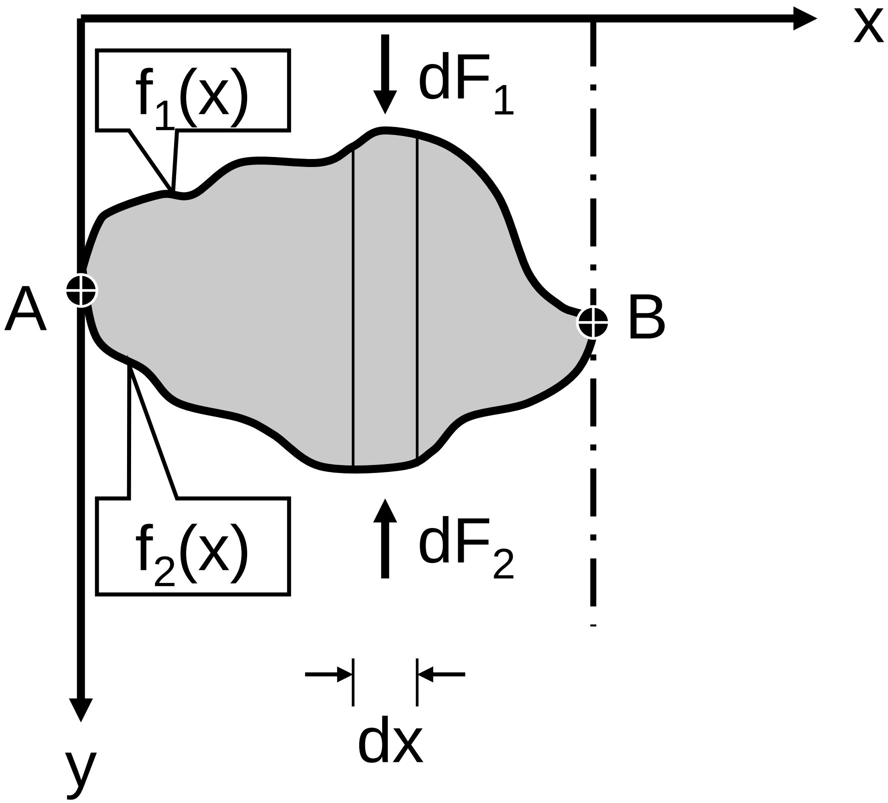
1.07 Archimedisches Prinzip (hydrostatischer Auftrieb)



Beliebig geformter eingetauchter Körper mit der Wichte $\gamma_F = \gamma_{Festkörper}$ und der Einheitsbreite s = 1(m) senkrecht zur Tafelebene (x-y-Ebene).

Die Begrenzung oberhalb A und B ist gegeben durch:

$$y = f_1(x)$$

Unterhalb von A und B:

$$y = f_2(x)$$

Auf dx wirken Flüssigkeitsdruckkräfte $(\gamma = \gamma_{Flüssigkeit})$

nach unten: $dF_1 = \gamma \cdot f_1(x) \cdot dx \cdot 1$

nach oben : $dF_2 = \gamma \cdot f_2(x) \cdot dx \cdot 1$

insgesamt : $dF = dF_2 - dF_1 = \gamma \cdot (f_2(x) - f_1(x)) \cdot dx \cdot 1$

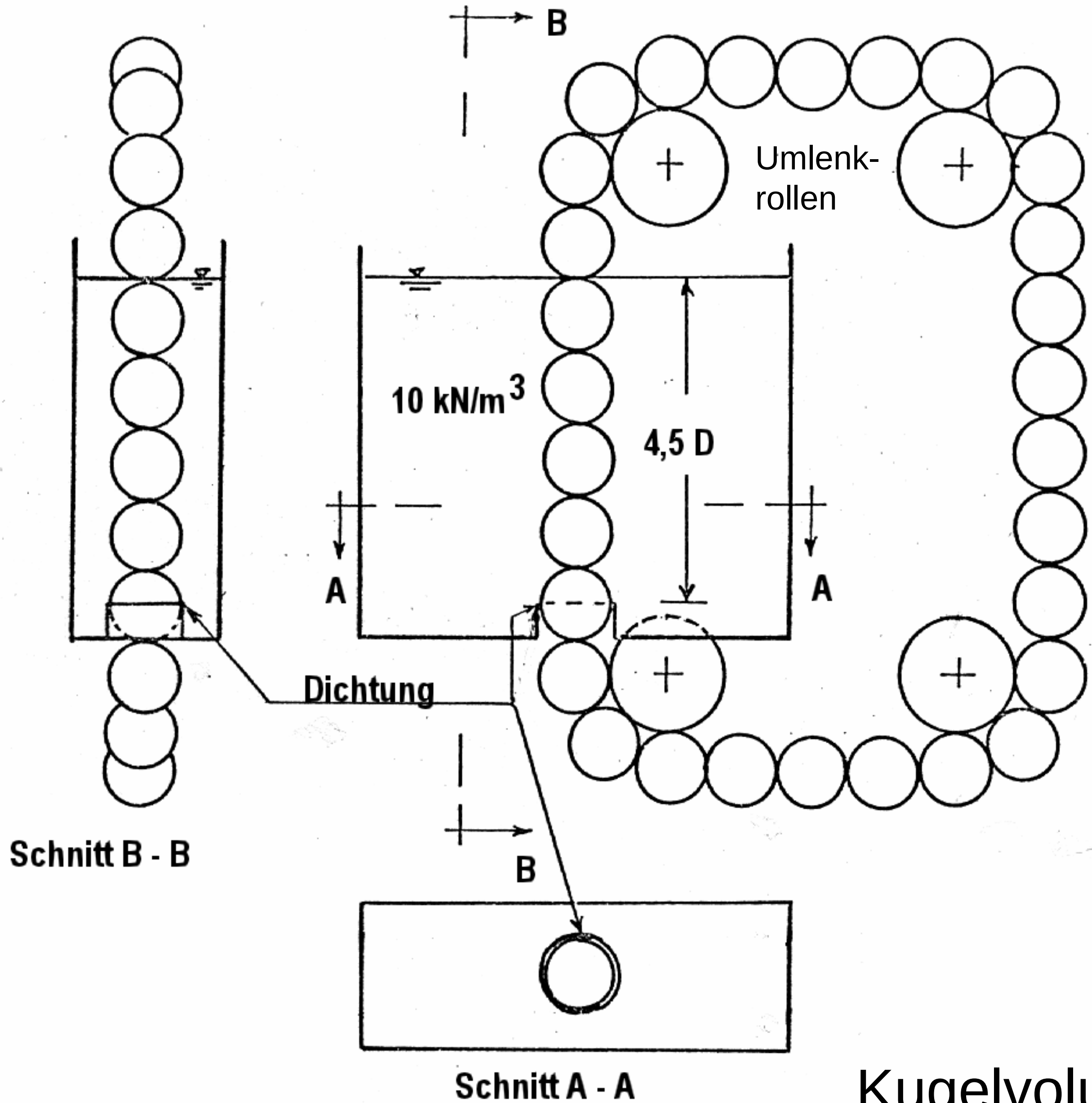
Die nach oben gerichtete Resultierende wird dabei positiv angesetzt. Die Gesamtkraft durch Integration ist dann

$$F = \int_A^B dF = \gamma \int_A^B \left(f_2(x) - f_1(x) \right) \cdot dx$$

Es ist aber

$$\int_A^B \left(f_2(x) - f_1(x) \right) \cdot dx = V$$

das Volumen (V) des Körpers mit der Einheitsbreite s = 1m, so dass die nach oben gerichtete Kraft $F_A = \gamma \cdot V$ beträgt
(= *Gewichtskraft des verdrängten Flüssigkeitsvolumens*).
Wird der Körper durch einen gedachten Schnitt von der Flüssigkeit getrennt, so wirkt auf ihn nur die Eigengewichtskraft
$F_G = \gamma_F \cdot V$.
Die Resultierende ist $F_R = F_A - F_G = (\gamma - \gamma_F) \cdot V$
F_R positiv ($\gamma_F < \gamma$): $\longrightarrow$ Auftrieb, Körper schwimmt auf
F_R negativ ($\gamma_F > \gamma$): $\longrightarrow$ Abtrieb, Körper sinkt.



Eine Kugelkette befindet sich mit der Länge L = 4,5 D in einem mit Wasser gefüllten Behälter.

a) Bewegt sich die Kette, wenn jegliche Reibung (an Dichtung u. Umlenkrollen) vernachlässigbar gering ist ?

b) Liegt ein Perpetuum mobile vor ?

Kugelvolumen: $$V_K = \frac{\pi \cdot D^3}{6}$$

Auftriebskraft F_A = Gewichtskraft F_G der von <u>4</u> Kugeln verdrängten Wassermenge

$$F_A = 4 \cdot \gamma \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{6}$$

Wasserauflast an unterer Halbkugeloberfläche:

$$F_V = -\gamma \cdot \left(4{,}5 \cdot D \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} - 0{,}5 \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{6} \right) = -\gamma \cdot \pi \cdot \frac{12{,}5 \cdot D^3}{12}$$

(Kreiszylinder - Halbkugelvolumen)

Resultierende Kraft ist nach unten gerichtet:

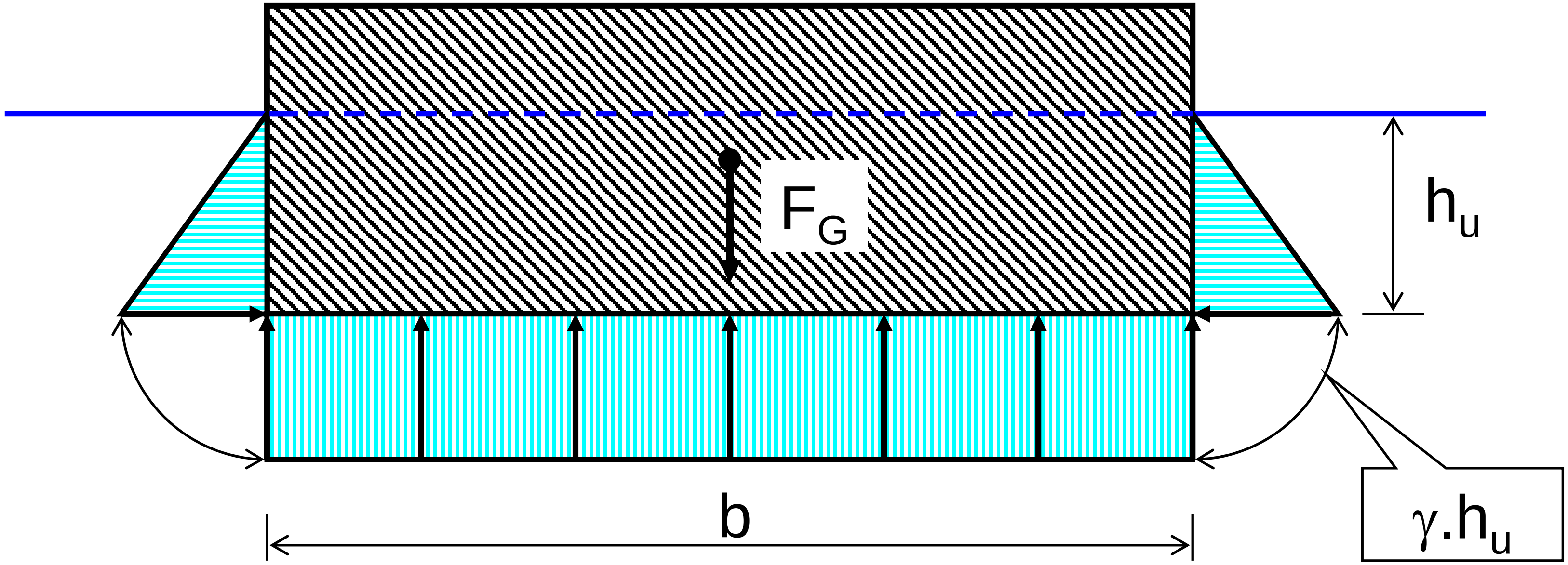
$$F_R = \gamma \cdot \pi \cdot \frac{8 \cdot D^3 - 12{,}5 \cdot D^3}{12} = -\frac{4{,}5}{12} \cdot \gamma \cdot \pi \cdot D^3$$

Mit D = 1 m und $\gamma = 10\, kN / m^3$ ergibt sich F_R = -11,78 kN.

Bei der anfänglichen Abwärtsbewegung nimmt die Oberfläche der belasteten Kugel und damit die Wasserauflast ab. Desweiteren entsteht dabei eine zusätzliche *nach oben* gerichtete Kraft an der Unterseite der zusätzlich (oben) eintauchenden Kugel.
Aus Trägheitsgründen kann aber ein Gleichgewichtszustand sofort nicht erreicht werden. Nach unten und nach oben gerichtete überschießende Kräfte wechseln im Folgenden ab.
Nur bei vorhandener Reibung würde das System nach der Ausführung gedämpfter Schwingungen in der Gleichgewichtslage zum Stillstand kommen.

<u>Anmerkung zum Auftriebsprinzip:</u> Archimedes soll dieses Prinzip entdeckt haben anlässlich der Fragestellung, ob eine ihm vorgelegte Krone tatsächlich aus purem Gold bestehe. Zum Nachweis hat er einen gleichgewichtigen Goldbarren angefertigt und beide Objekte - in gleiche Behälter in Wasser eingetaucht - vergleichend gewogen.

1.08 Schwimmende Körper ($F_A = F_G$)



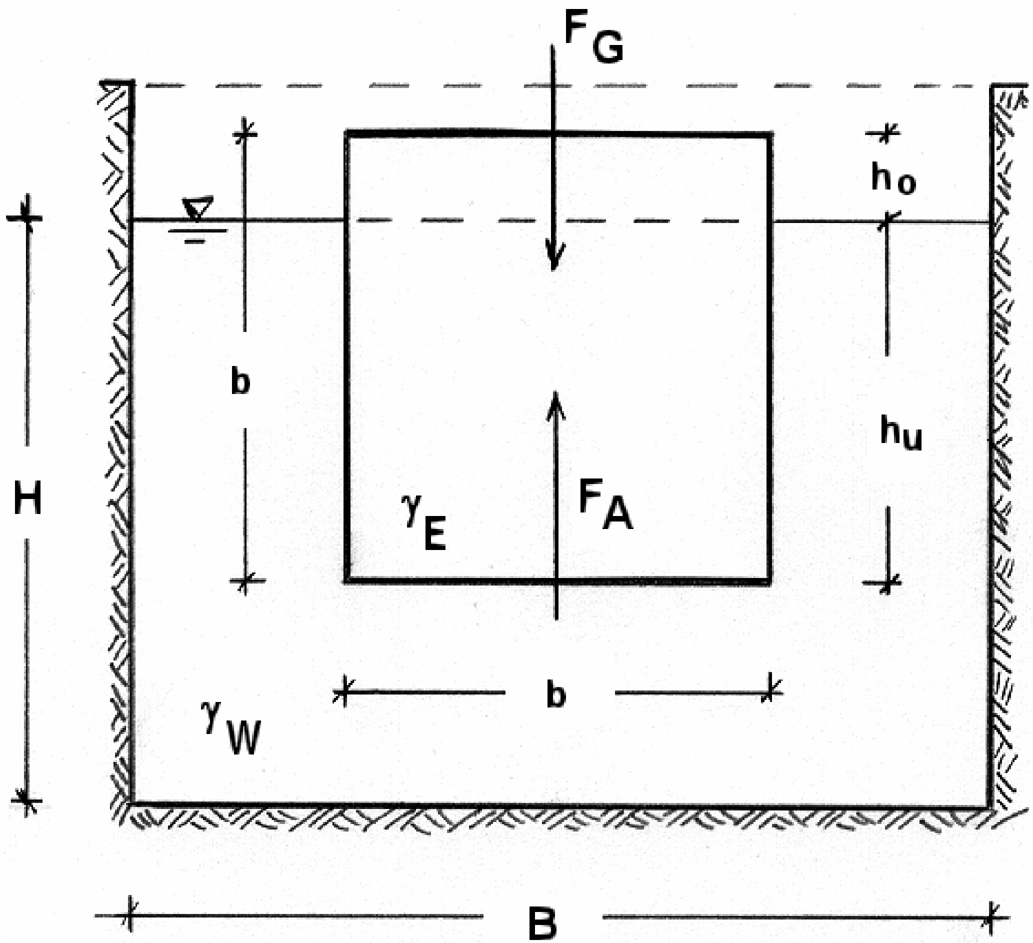
Gegeben: Homogener Körper mit Rechteckquerschnitt, Länge senkrecht zur Tafel s = 1m, Gewichtskraft (in Luft) = F_G.

Gesucht: Eintauchtiefe h_u bzw. die Wichte der Flüssigkeit γ.

Schwimmbedingung: $F_A = F_G$

$$\gamma \cdot h_u \cdot b = F_G$$

$$\rightarrow h_u = F_G / (\gamma \cdot b); \quad \gamma = F_G / (h_u \cdot b)$$

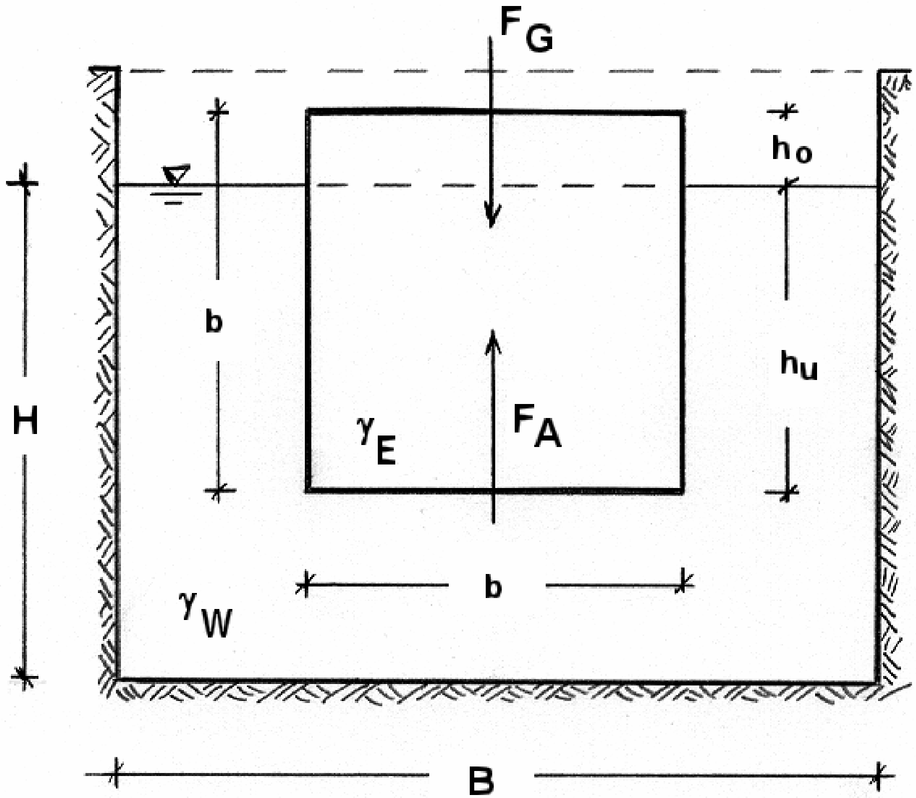


Ein kubischer Eisblock (Würfel) mit dem Volumen $V_E = 1\ m^3$ schwimmt in einer Baugrube in Wasser (0^o C). Kantenlänge b = 1m.

Wie ändert sich die Wassertiefe H in der Baugrube, wenn der Eisblock geschmolzen ist ?

$\gamma_W = 10\ kN/m^3$

$\gamma_E = \ \ 9\ kN/m^3$



Schwimmen:

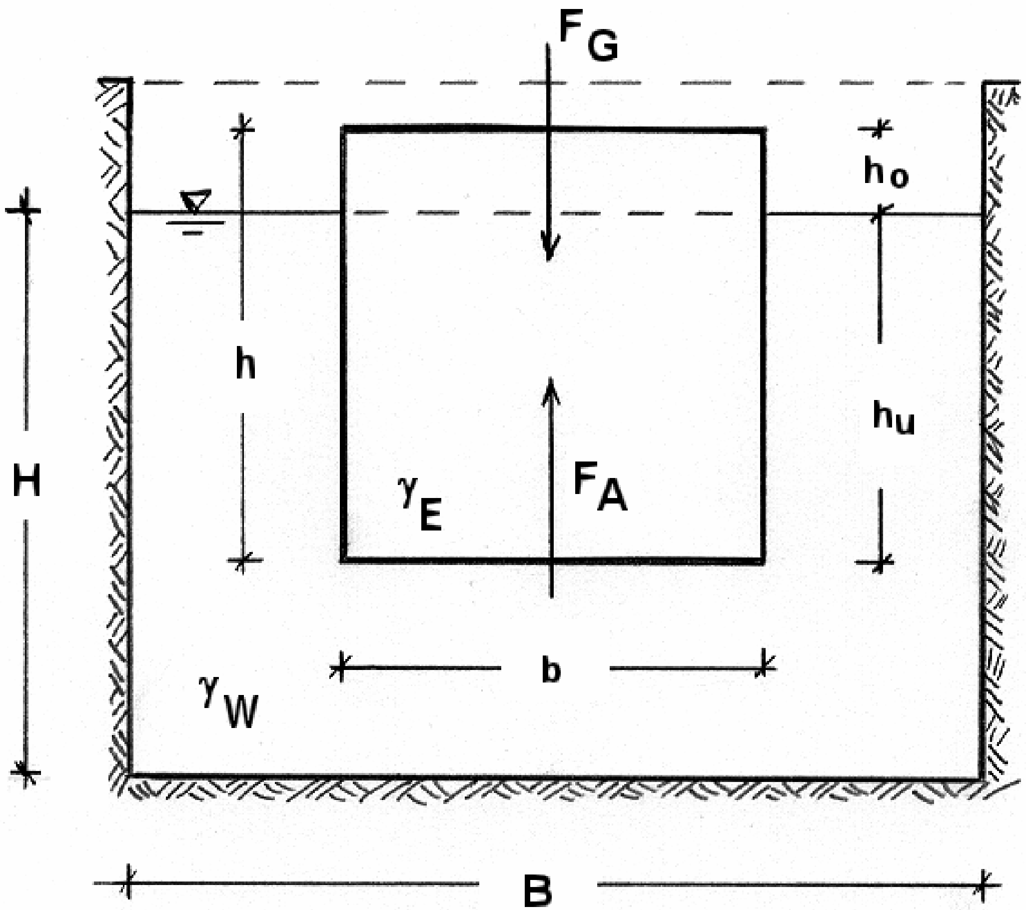
$F_G = F_A = \gamma_E \cdot V_E = \gamma_W \cdot V_W$

---> $V_W = \gamma_E \cdot V_E / \gamma_W = 0{,}9\ m^3$

Gewichtsausgleich: 0,9 m^3 flüssiges Wasser entspricht 1 m^3 Eis. Aus 1 m^3 Eis wird 0,9 m^3 flüssiges Wasser = Verdrängungsvolumen V_W .

H ändert sich nicht !

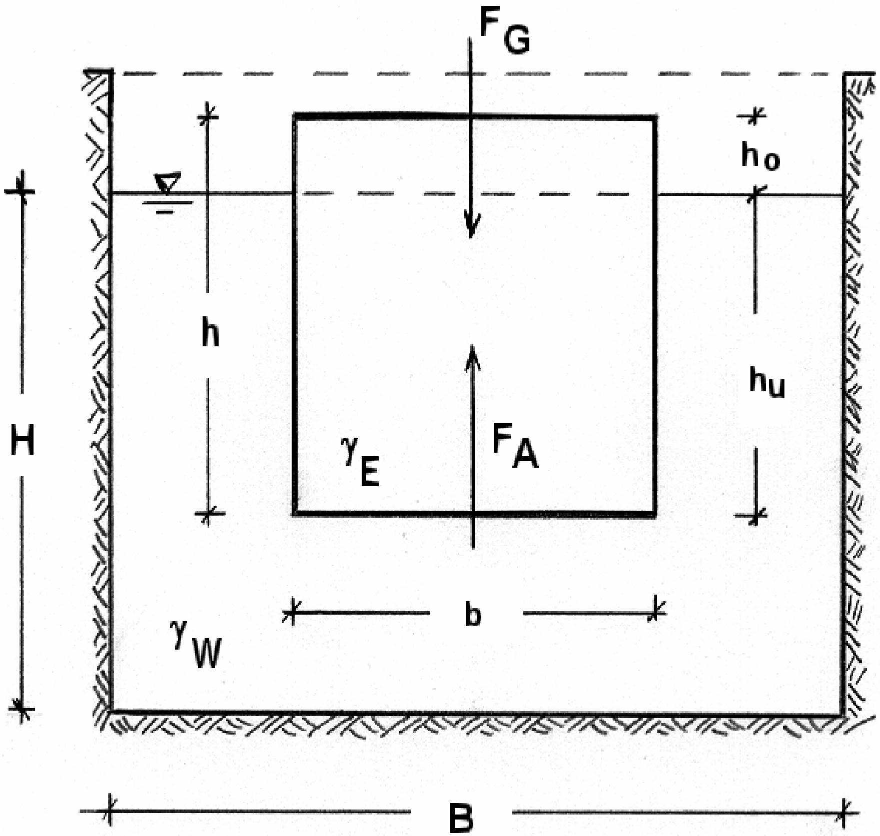
$$\gamma_E \cdot b^3 = \gamma_W \cdot b^2 \cdot h_u \rightarrow h_u = 9 \cdot 1/10 = 0{,}9\,m$$



Ein quaderförmiger Eisberg (Scholle mit konstanter Grundfläche $A = b \cdot 1$) ragt $h_o = 12$ m aus dem Wasser.
Welches ist seine Eintauchtiefe h_u ?

$\gamma_W = 10{,}2\ \mathrm{kN/m^3}$

$\gamma_E = 9{,}2\ \mathrm{kN/m^3}$



Schwimmen: $F_G = F_A$

$$F_A = \gamma_W \cdot A \cdot h_u = F_G = \gamma_E \cdot A \cdot (h_o + h_u)$$

$$\gamma_W \cdot h_u = \gamma_E \cdot h_o + \gamma_E \cdot h_u$$

$$h_u = \frac{\gamma_E}{\gamma_W - \gamma_E} \cdot h_o$$

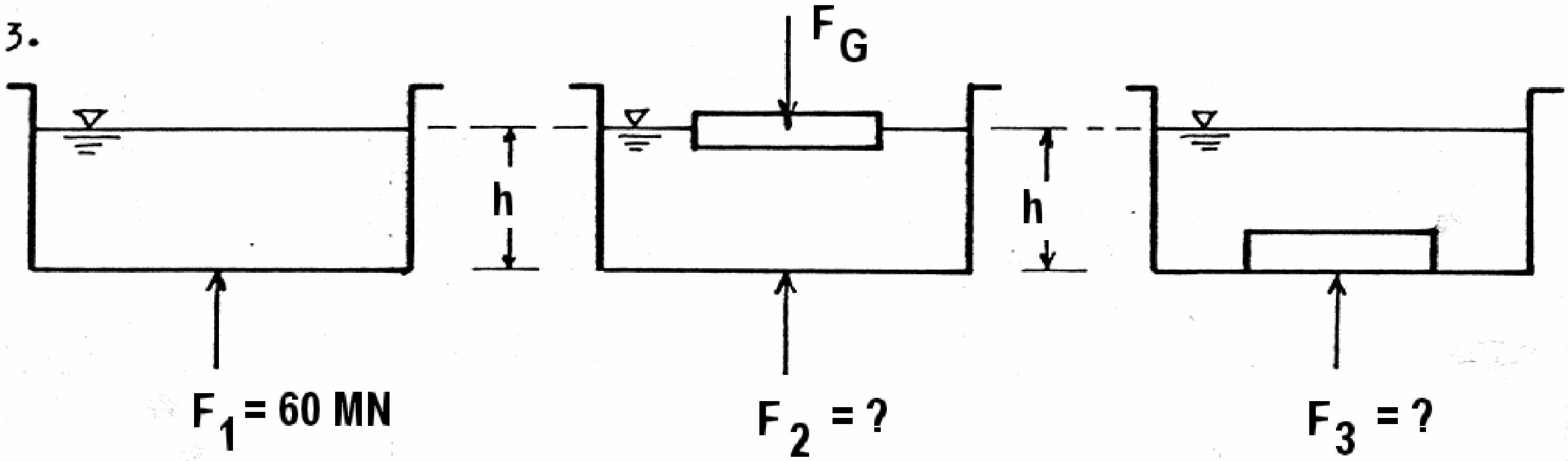
$$= \frac{9{,}2}{10{,}2 - 9{,}2} \cdot 12 = 110{,}4\,m$$

$$h = h_o + h_u = 12{,}0 + 110{,}4 = 122{,}4\,\mathrm{m}$$

Verhältniswerte:

$$\frac{h_o}{h_u} = \frac{12}{110{,}4} = \frac{1}{9{,}2} \neq \frac{1}{7}$$

$$\frac{h_o}{h} = \frac{12}{122{,}4} = \frac{1}{10{,}2} \neq \frac{1}{7}$$



Die resultierende Auflagerkraft eines mit Wasser (γ_W = 10 kN/m^3) gefüllten Troges einer Kanalbrücke beträgt F_1 = 60.000 kN.

a) Wie ändert sich die Auflagerkraft F_2 wenn ein aus Stahl (γ_{St} = 80 kN/m^3) gefertigter Schwimmponton mit dem Leergewicht in Luft F_G = 10.000 kN in den Trog eingefahren ist ?

b) Welche Auflagerkraft F_3 ergibt sich, wenn der Ponton im Trog gesunken ist ?

zu a). Schwimmbedingung: $F_A = \gamma \cdot V = F_G$

Der Ponton hat das von ihm eingenommene Wasservolumen V nach OW / UW verdrängt. (Die Wassertiefe ist konstant geblieben.)

Verdrängungsvolumen $V = F_A / \gamma = 10.000/10 = 1.000\ m^3$

zu b). Nur die Stahlkonstruktion verdrängt Wasser. (Der Ponton sei vollständig mit Wasser gefüllt.)

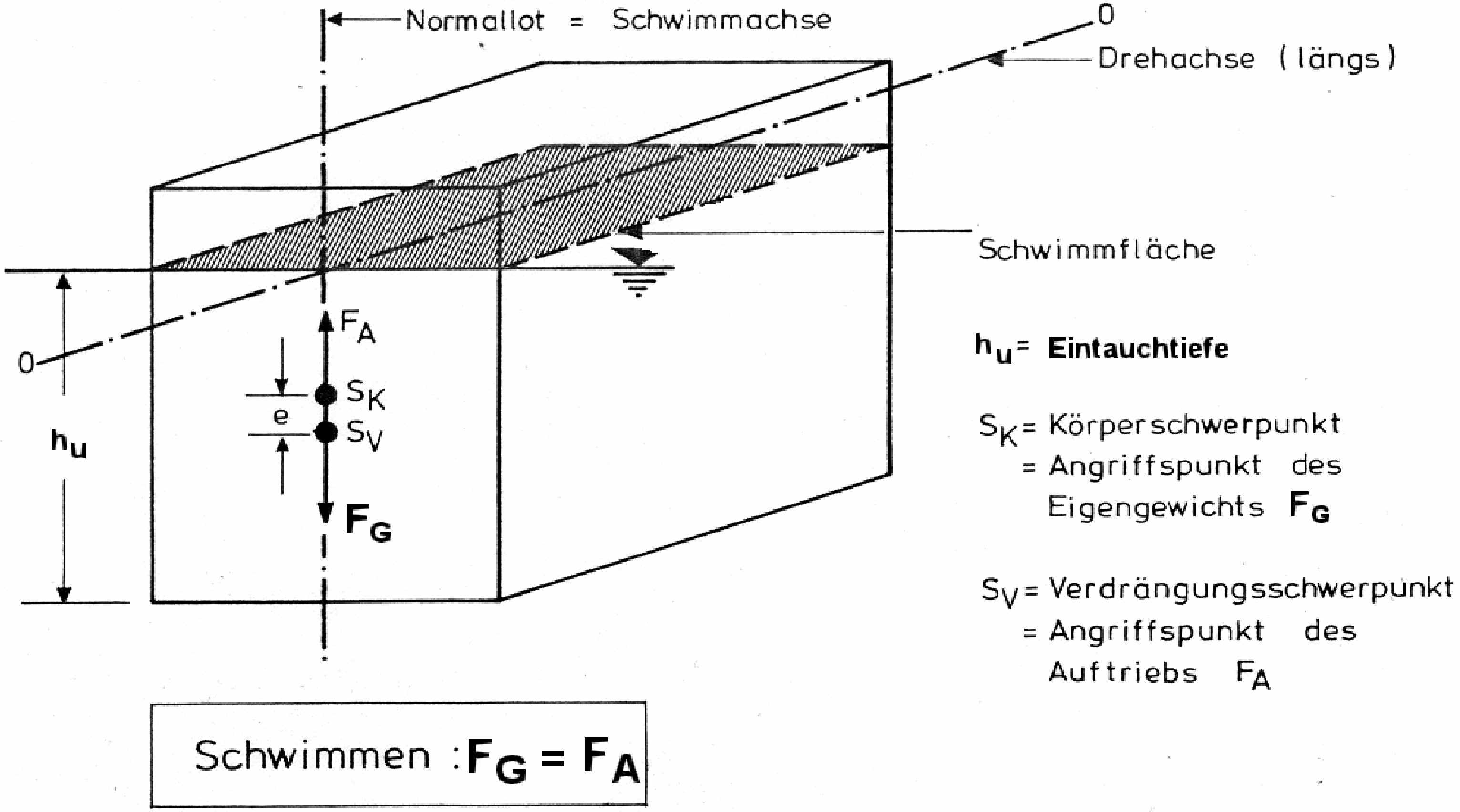
Stahlgewicht $F_G = 10.000\ kN = \gamma_{St} \cdot V_{St} = 80 \cdot V_{St}$

$\rightarrow V_{St} = 10.000/80 = 125\ m^3$ (Verdrängungsvolumen des Stahls)

Auftriebskraft: $F_A = \gamma_{W.} \cdot V_{St} = 10 \cdot 125 = 1250\ kN$

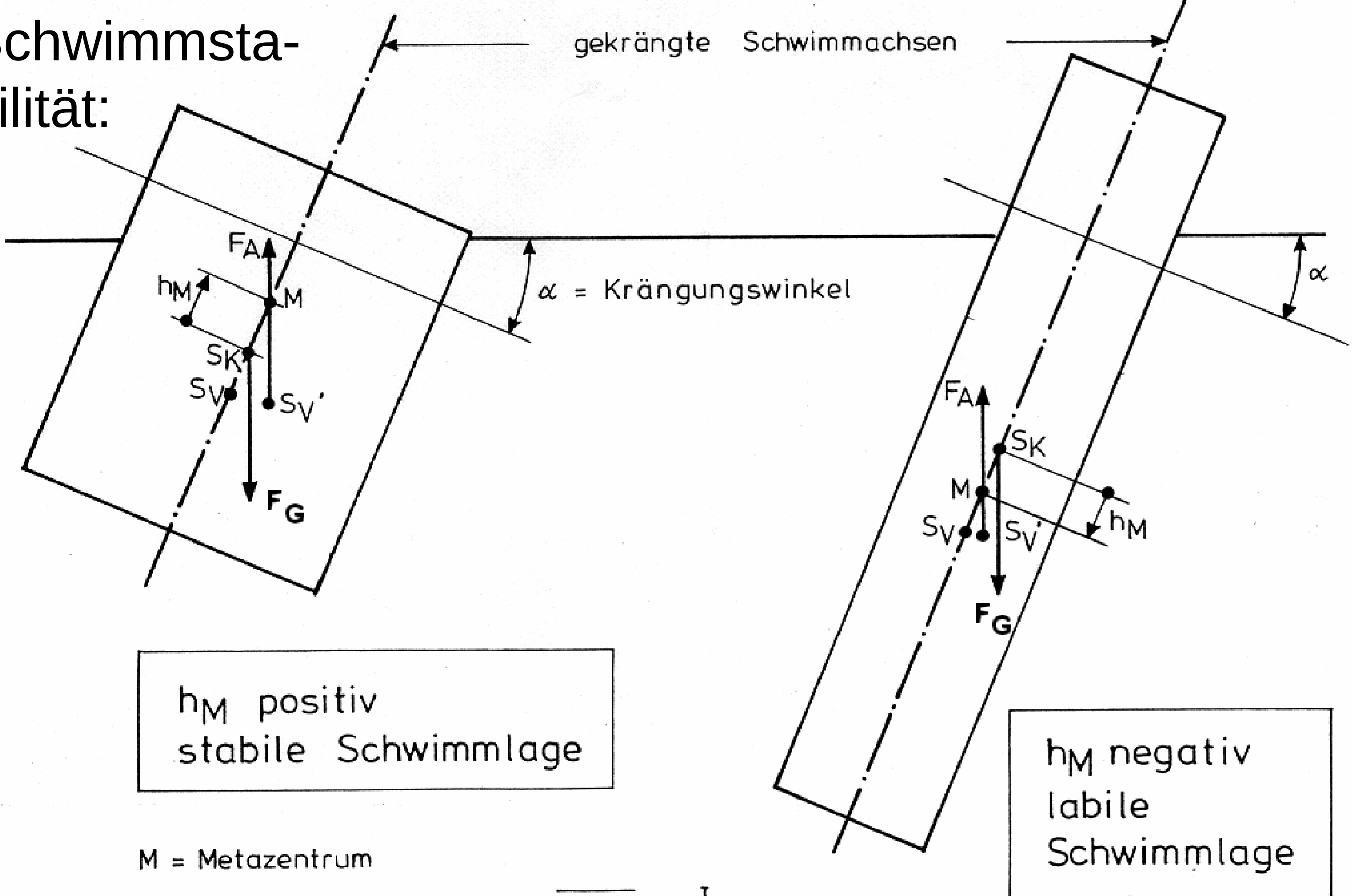
$F_3 = 60.000 + 10.000 - 1250 = 68.750\ kN$

1.09 Schwimmstabilität (Kentersicherheit)



Instabile Schwimmlage: Schwimmkörper kentert durch Umschlagen um eine horizontal durch den Schwerpunkt der Schwimmfläche verlaufende Drehachse. Nachweis der Kentersicherheit bezüglich der beiden Hauptachsen (Drehachse längs und quer) der Schwimmfläche.

Schwimmstabilität:



M = Metazentrum

Metazentrische Höhe $h_M = \overline{S_K M} = \frac{I}{V} - e$

I = **Fächenmoment 2. Grades** der Schwimmfläche um die Drehachse

V = Verdrängung

e = Abstand $\overline{S_K S_V}$

Stabilitätsbedingung:

$$\boxed{\frac{I_{min}}{V} > e}$$

Ein homogener Quader (vergl vorn) bestimmter Wichte γ_F mit den Abmessungen Höhe h = 10m, Breite b = 4m, Länge l = 10m ist hinsichtlich seiner Schwimmstabilität in Wasser (γ_W = 10 kN/m³) zu untersuchen.

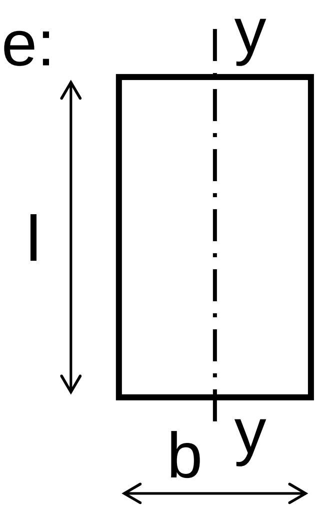
a). Höhe h = $h_u + h_o$ = 10m; h_u = 6m, h_o = 4m

$$V_W = l \cdot b \cdot h_u = 10 \cdot 4 \cdot 6 = 240 m^3$$

$$F_A = \gamma_W \cdot V_W = \gamma_W \cdot l \cdot b \cdot h_u = 10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 6 = 2400\ kN = F_G$$

$$\gamma_F = \frac{F_G}{V_F} = \frac{2400}{10 \cdot 10 \cdot 4} = 6 kN/m^3 \qquad e = 5 - 3 = 2m$$

Flächenmoment 2. Grades um die Längsachse (y) der Schwimmfläche:

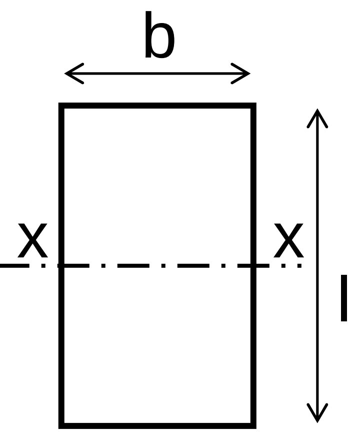


$$I_y = \frac{l \cdot b^3}{12} = \frac{10 \cdot 4^3}{12} = 53{,}33 m^4$$

$$h_m = \frac{I_y}{V_w} - e = \frac{53{,}33}{240} - 2 = -1{,}78 < 0$$

instabil !

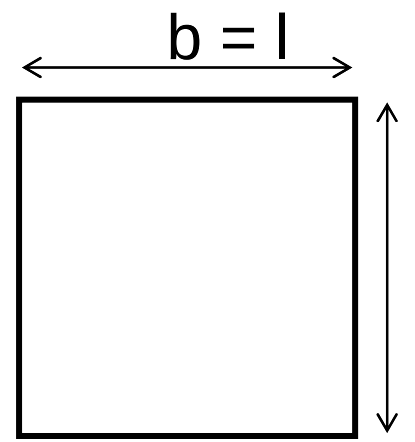
Flächenmoment 2. Grades um die Querachse (x) der Schwimmfläche:



$$I_x = \frac{b \cdot l^3}{12} = \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 333{,}33\, m^4$$

$$h_m = \frac{I_x}{V_w} - e = \frac{333{,}33}{240} - 2 = 1{,}389 - 2 = -0{,}611 < 0$$

instabil !



b). Nachweis für andere Schwimmlage :

Höhe und Breite gegenüber Fall a) vertauscht

Höhe h = 4m = $h_u + h_o$;

Breite b = 10m, Länge l = 10m

$$V_W = h_u \cdot b \cdot l = h_u \cdot 10 \cdot 10 = h_u \cdot 100 = 240\ m^3$$

h_u = 2,4 m; $h_o = h - h_u$ = 1,6 m; e = 4/2 - 2,4/2 = 0,8 m.

$$I_y = \frac{l \cdot b^3}{12} = \frac{10 \cdot 10^3}{12} = I_x = \frac{b \cdot l^3}{12} = \frac{10 \cdot 10^3}{12} = I = 833{,}33\, m^4$$

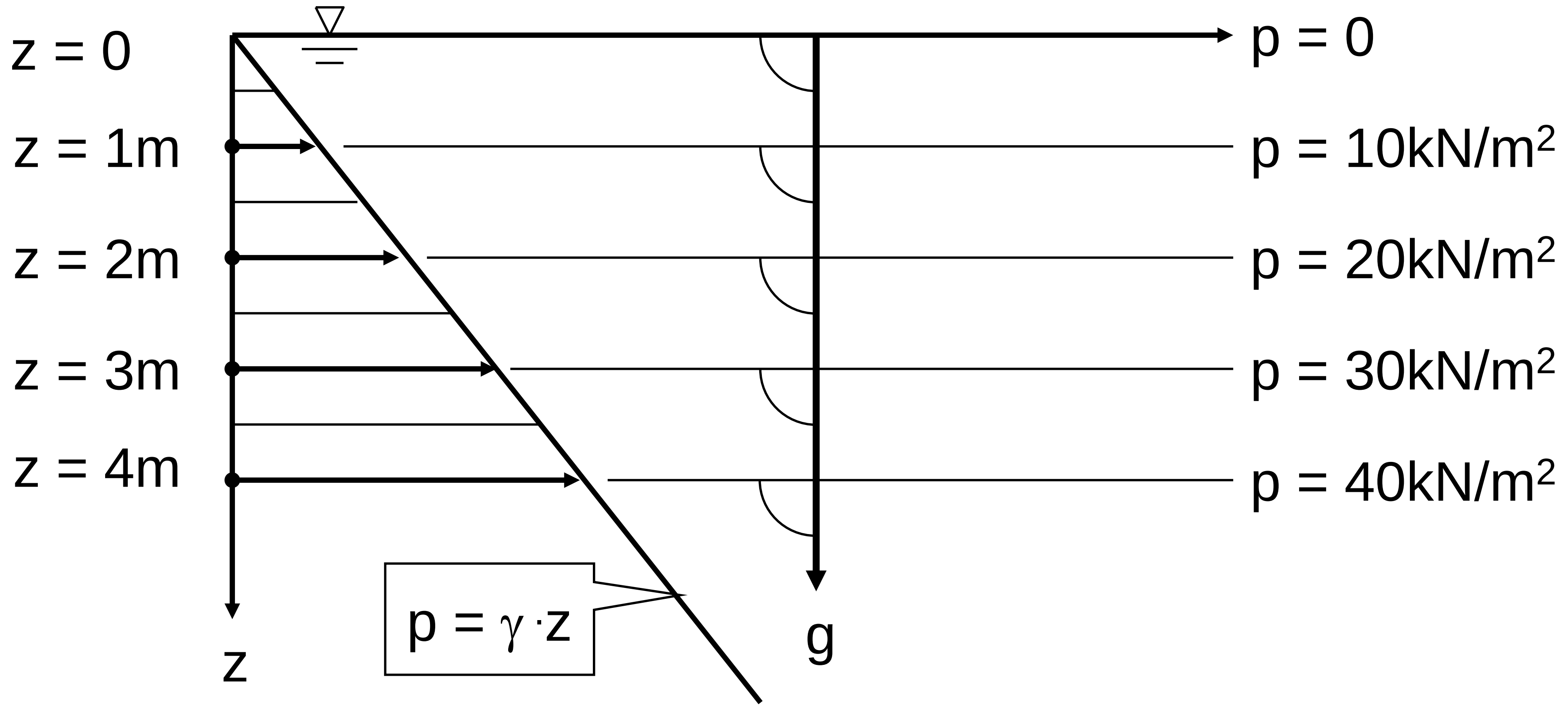
$$h_m = \frac{I}{V_w} - e = \frac{833{,}33}{240} - 0{,}8 = 3{,}47 - 0{,}8 = 2{,}67m > 0$$

stabil bezügl. beider Achsen !

Anmerkung zu Schiffsbewegungen: Ein Schwimmkörper hat 6 Freiheitsgrade der Bewegung. Man unterscheidet bezüglich dreier Achsen die *Translationsbewegungen* (surge, sway, heave) und die *Rotationsbewegungen* (roll, pitch, yaw). Solche Bewegungen allein führen jedoch nicht unbedingt zu einer instabilen Schwimm-lage.

1.10 Andere Beschleunigungssysteme

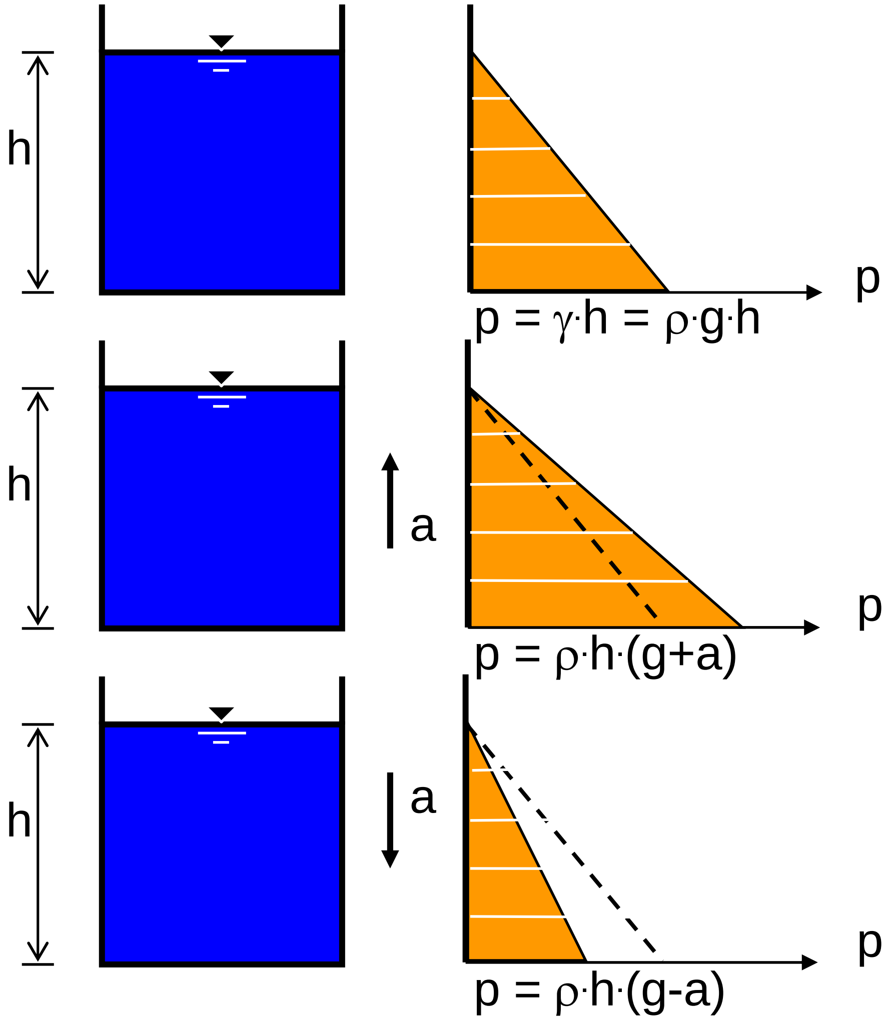
Schwerebeschleunigung g allein wirksam: Wasser $\gamma = 10\ kN / m^3$



Der Beschleunigungsvektor (g) steht stets senkrecht zu den Linien gleichen Druckes (Isobaren); hier Horizontallinien.

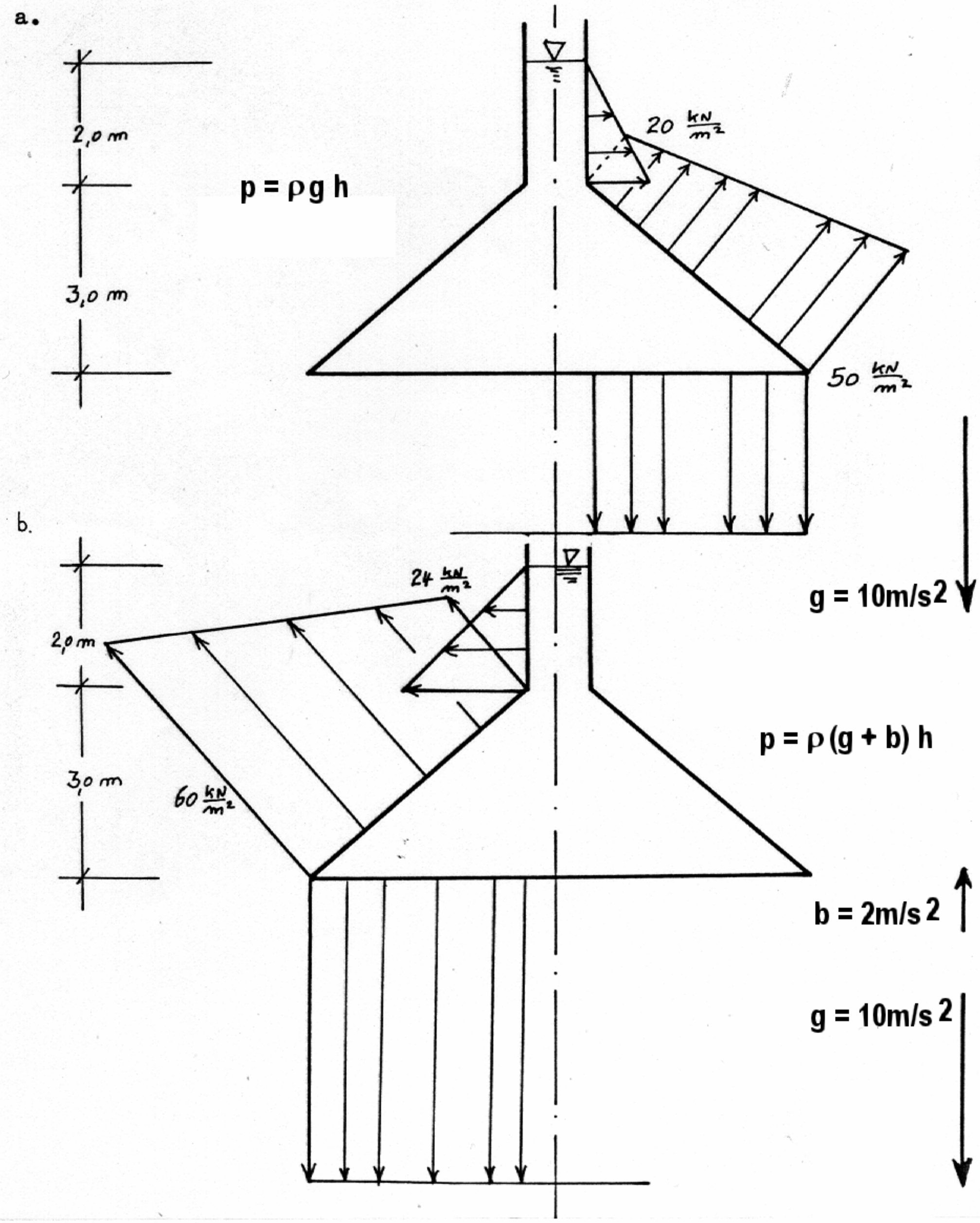
Zur vereinfachten Zahlenrechnung Näherung: $g = 10 m/s^2$; $\rho_W = 1\ t/m^3$.

Zusätzliche vertikale Beschleunigung a:



Beim freien Fall (a = g) wird p = 0 (Schwerelosigkeit).

Bei senkrechter Beschleunigung wirkt die Trägheit in *entgegengesetzter* Richtung. Ist die Beschleunigung konstant, so wirkt bei Beschleunigung nach oben a = konst. in Richtung der Schwerkraft (+a). Bei Beschleunigung nach unten wirkt a = konst. der Schwerkraft entgegen (-a). Entsprechend ändern sich die Druckspannungen.



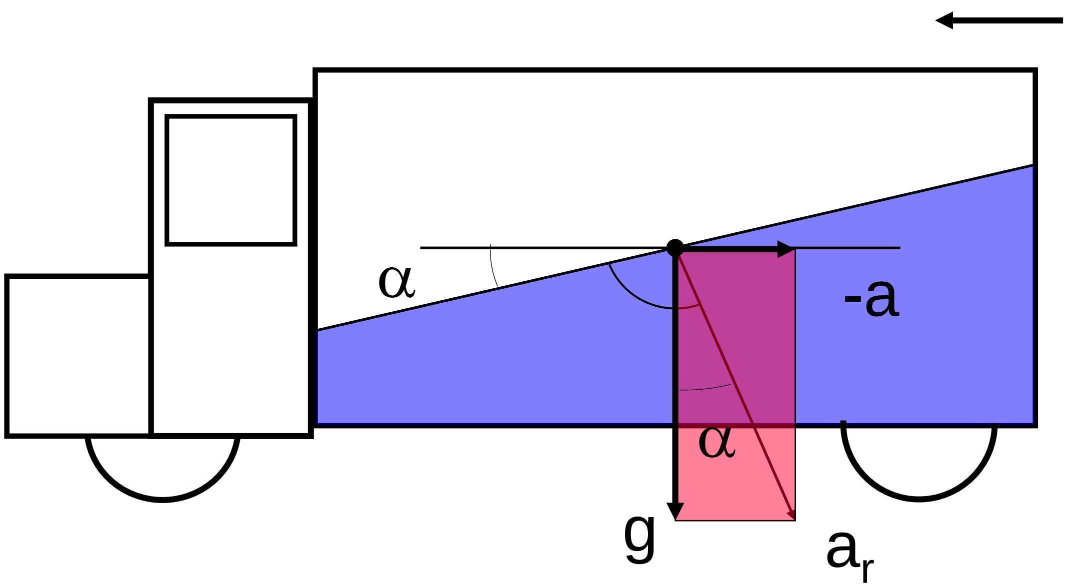
a). Gefäß in Ruhe: Druckspannungsverteilung bei alleiniger Wirkung der Erdbeschleunigung $g = 10 m/s^2$.

b). Gefäß erfährt eine zusätzliche Beschleunigung $b = 2 m/s^2$ entgegen der Richtung der Erdbeschleunigung.

Die Flüssigkeit übt auf das beschleunigte Gefäß eine Reaktionskraft aus mit der Folge, dass sich die Beträge der Beschleunigungen bezüglich der Druckspannungen addieren:

$p = \rho\,(g + b)\,h$.

Horizontale Beschleunigung:



$$a = \frac{dv}{dt} = konst.$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{g}$$

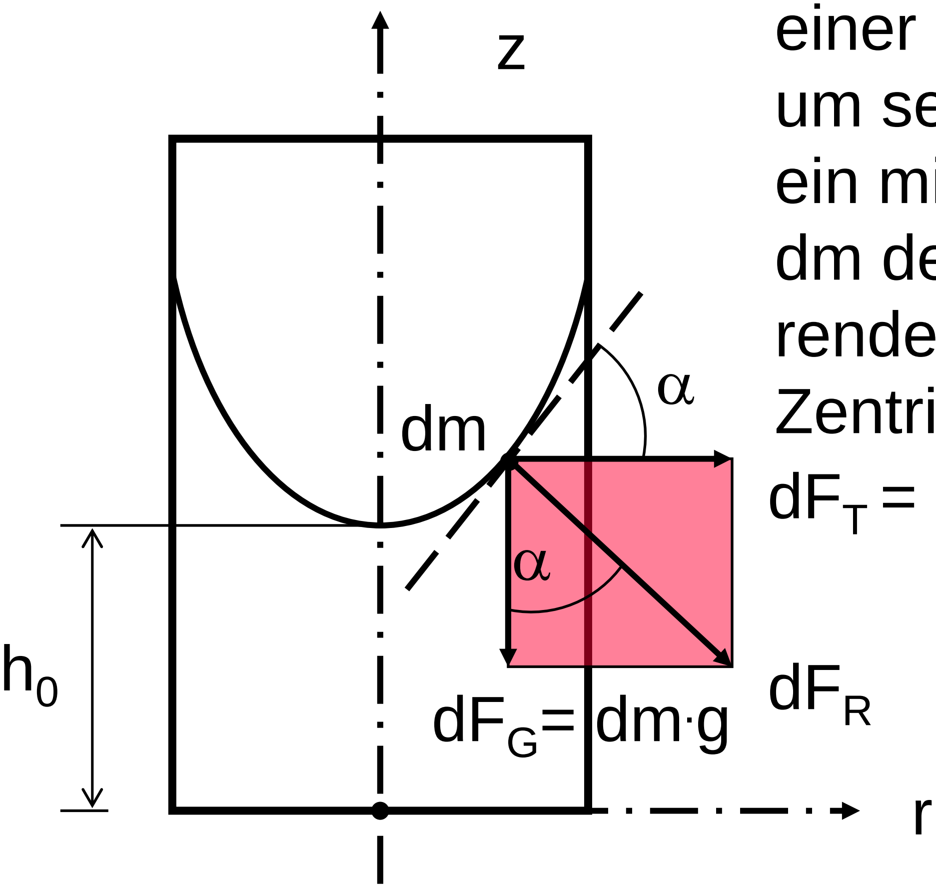
Bei Schiffshebewerken mit Förderung auf schiefer Ebene $a < 0{,}015\ m/s^2$!

Die Schräglage des Wasserspiegels (Winkel α) ergibt sich aus dem negativen Beschleunigungsvektor a (Trägheitswirkung) und der Schwerebeschleunigung g.

Beim Anfahren wird Energie *verbraucht* d.h, potentielle Energie wird durch die Schräglage erzeugt. Diese wird nach Aufhören der Beschleunigung in Wellenbewegung umgesetzt.

Flüssigkeiten in rotierenden Gefäßen unterliegen zusätzlich der Zentrifugalbeschleunigung: Spiegel = Rotationsparaboloid.

Rotierendes Gefäß:



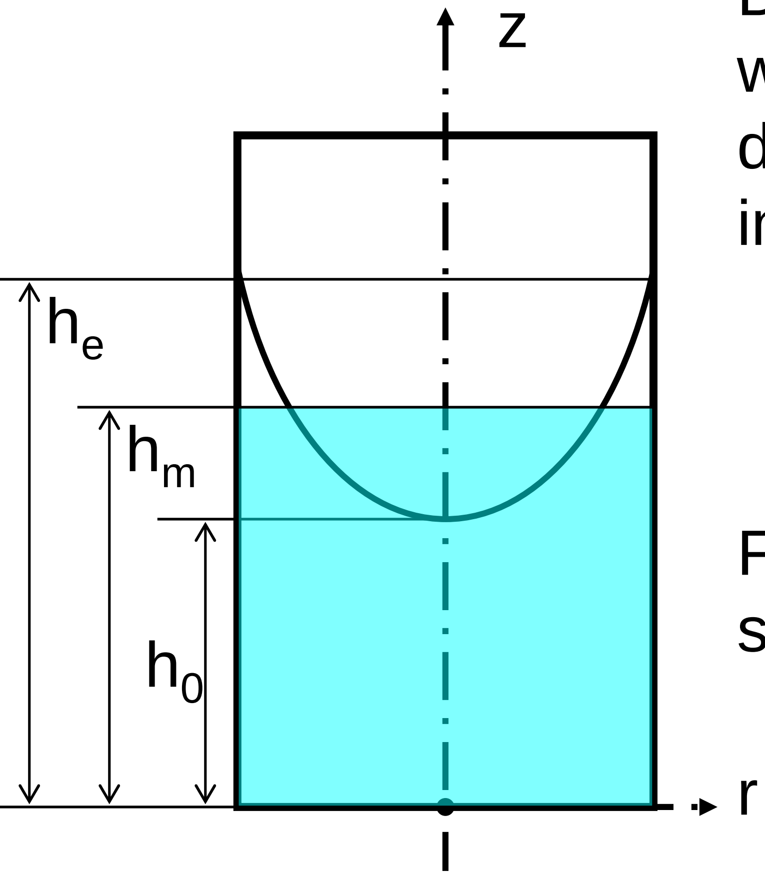
Bei der Rotation eines teilweise mit einer Flüssigkeit gefüllten Behälters um seine vertikale Achse (z) wirkt auf ein mitbewegtes Flüssigkeitsteilchen dm der freien Oberfläche die Resultierende dF_R aus Gewichtskraft dF_G und Zentrifugalkraft dF_T (= Trägheitskraft).

$dF_T = dm \cdot \omega^2 \cdot r = dm \cdot v^2/r$

Die Neigung der Tangente in jedem Punkt der *ausgelenkten* Flüssigkeitsoberfläche ist senkrecht zur Resultierenden dF_R.

Im z - r - Koordinatensystem ist

$$\tan\alpha = \frac{dz}{dr} = \frac{dm \cdot \omega^2 \cdot r}{dm \cdot g} = \frac{\omega^2 \cdot r}{g}$$



Differentialgleichung wird nach Trennung der Veränderlichen integriert:

Für $r = 0$ ist $z = h_0$, so dass $C = h_0$.

Parabel $z = f(r)$:

h_m ist die Ruhewassertiefe bei Stillstand des Behälters.

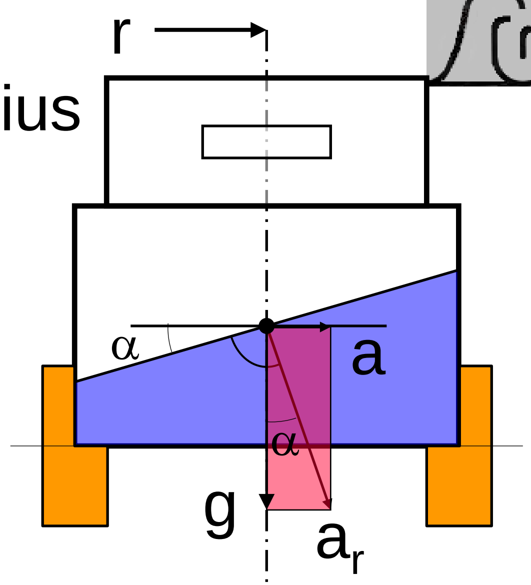
Der durch Rotation gebildete Hohlraum ist ein *Paraboloid*.

Der Flüssigkeitszylinder der Höhe $h_m - h_0$ wird bei Rotation in den betreffenden Drehkörper der Höhe $h_e - h_0$ verwandelt. Es ist $h_m - h_0 = h_e - h_m$, d.h, die maximalen Auslenkungen vom Ruhewasserspiegel sind *gleich*.

Ein Tankwagen fährt mit konstanter Geschwindigkeit v = 36 km/h um eine Kurve mit dem Radius r = 50m.

a). Welchen Neigungswinkel α gegen die Horizontale hat der Flüssigkeitsspiegel ?

b). Welche Gestalt hat die Druckspannungsfigur ?



Gegeben: $g = 10\ m/s^2$ $\gamma_F = 8\ kN/m^3$

Tankbreite b = 2m << r,

Flüssigkeitsstand in Ruhe h = 1m.

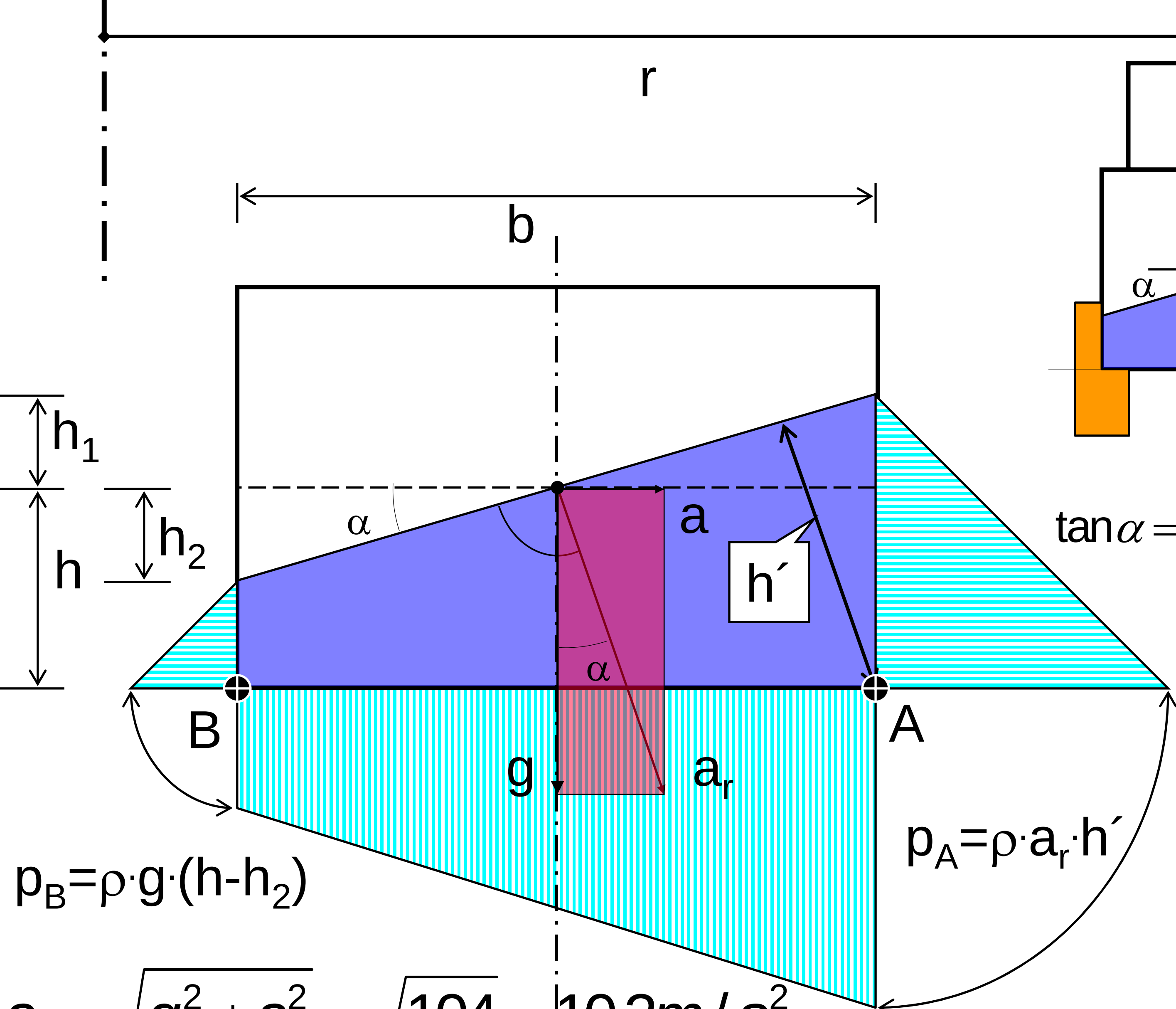
Zusätzlich zur Erdbeschleunigung g wirkt horizontal die Zentrifugalbeschleunigung $a = v^2/r$.

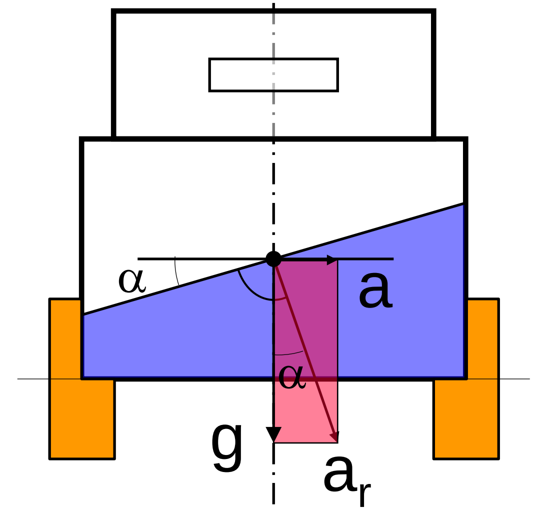
$$v = \frac{36000}{3600} = 10\frac{m}{s}$$

$$a = \frac{10^2}{50} = 2\frac{m}{s^2}$$

Die resultierende Beschleunigung a_r steht senkrecht auf dem geneigten Flüssigkeitsspiegel.

$$\tan\alpha = \frac{a}{g} = \frac{2}{10} = 0{,}2; \quad \alpha = 11{,}31^o$$





$$\tan\alpha=\frac{h_1}{b/2}=0{,}2\rightarrow h_1=0{,}2m$$

$p_A=\rho\cdot g\cdot(h+h_1)$

Isobaren sind parallel zum geneigten Wasserspiegel.

$$a_r=\sqrt{g^2+a^2}=\sqrt{104}=10{,}2m/s^2$$

$p_A=\rho\cdot g\cdot(h+h_1)$

Für r >> b ist $h_1 \approx h_2$