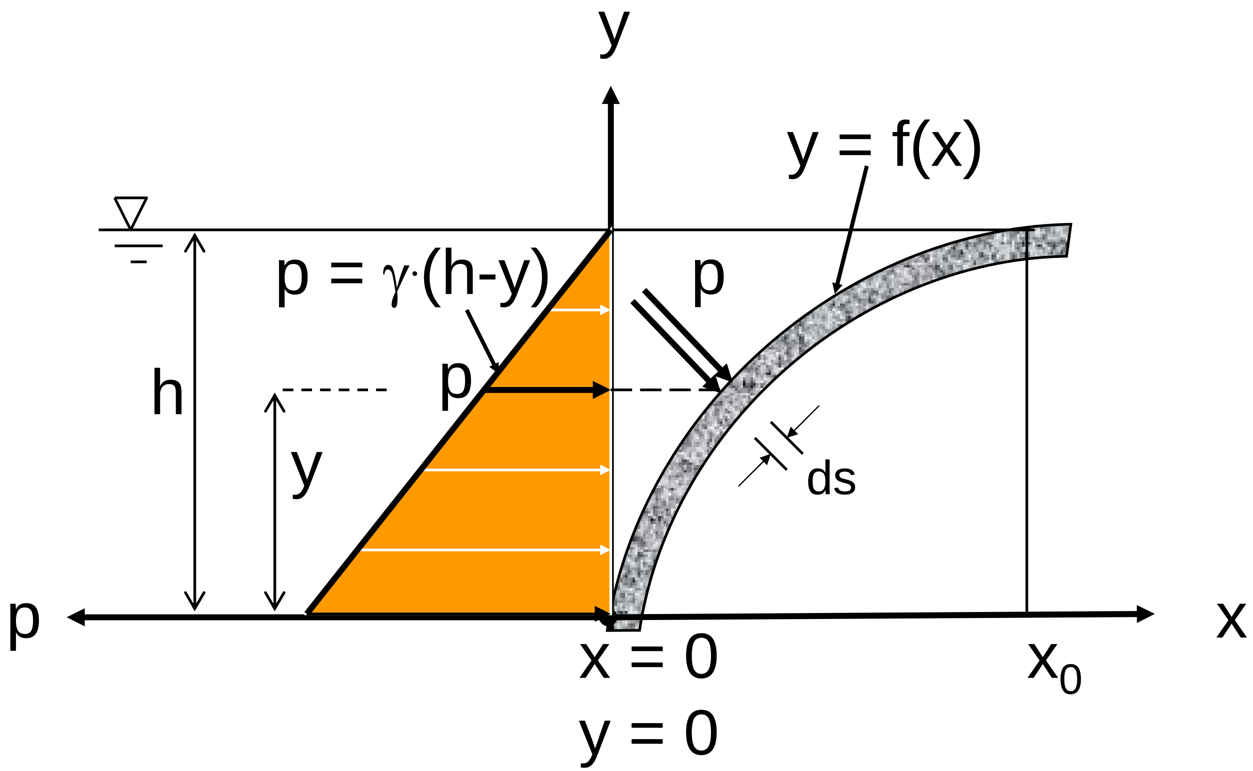
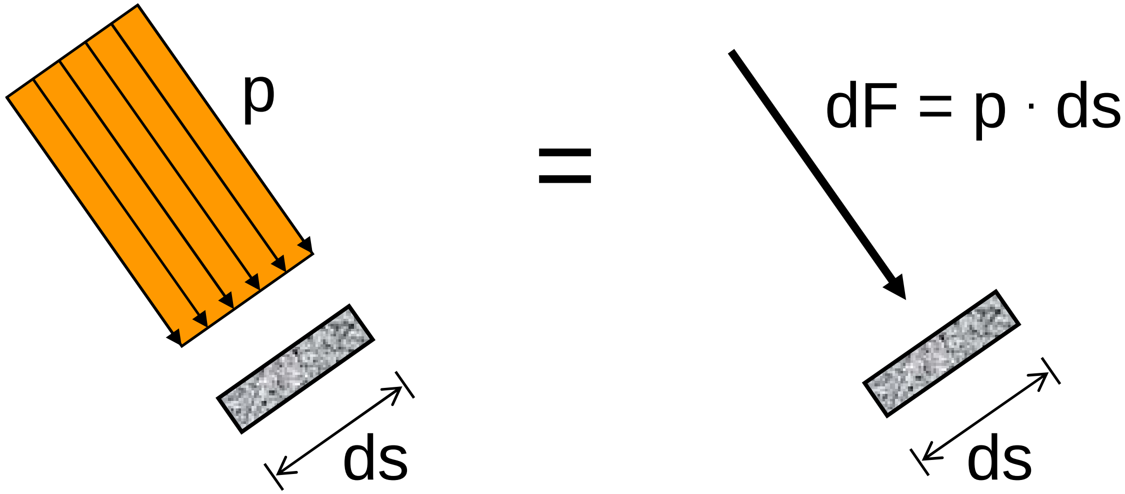
1.06 Druck an gekrümmten Flächen

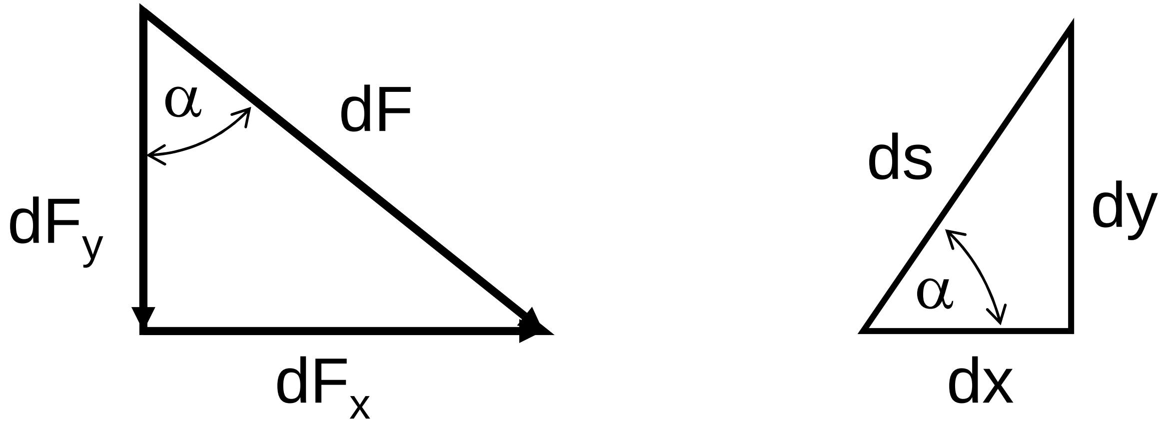


Es handelt sich um ein zweidimensionales Problem in der x-y-Ebene. Für die Ermittlung von Kräften muss auch die Dimension senkrecht zur Tafelebene berücksichtigt werden;
z.B. Einheitsbreite z = 1m.

Mit der Funktion $y = f(x)$
ist eine beliebige gekrümmte Fläche beschrieben. Senkrecht zur Tafelebene (x-y-Ebene) sei die Einheitsbreite $s = 1[m]$ vorhanden. Auf jedem Längenelement ds wirkt senkrecht dazu die mit der Tiefe unter dem Flüssigkeitsspiegel zunehmende Druckspannung p.

Im gewählten Koordinatensystem ist $p = \gamma \cdot (h-y)$





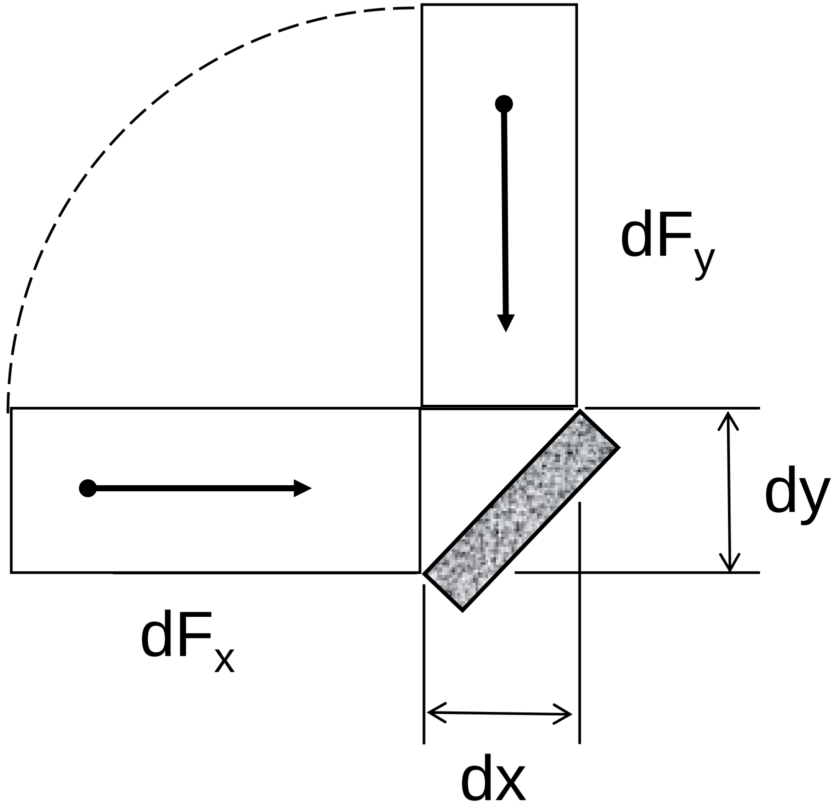
Für die Komponenten dF_x und dF_y von dF folgt aus den ähnlichen Dreiecken (s.o.):

$$\frac{dF_x}{dF} = \frac{dy}{ds}; \quad dF = p \cdot ds$$

$$dF_x = p \cdot ds \cdot \frac{dy}{ds} = p \cdot dy$$

$$\frac{dF_y}{dF} = \frac{dx}{ds}; \quad dF = p \cdot ds$$

$$dF_y = p \cdot ds \cdot \frac{dx}{ds} = p \cdot dx$$



$$dF_x = p \cdot dy$$

$$dF_y = p \cdot dx$$

Die x-Komponente (y-Komponente) der Kraft auf das Längenelement ergibt sich durch Multiplikation der Druckspannung p mit der auf die y-Richtung (x-Richtung) projizierten Länge dy (dx) des Längenelementes ds.

Die Gesamtkräfte ergeben sich durch Integration:

$$F_x = \int_0^h p(y) \cdot dy; \quad p(y) = \gamma \cdot (h - y)$$

$$F_x = \gamma \cdot \left[h \cdot y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=h} = \gamma \cdot \frac{h^2}{2}$$

Fläche des Druckspan-nungsdreiecks

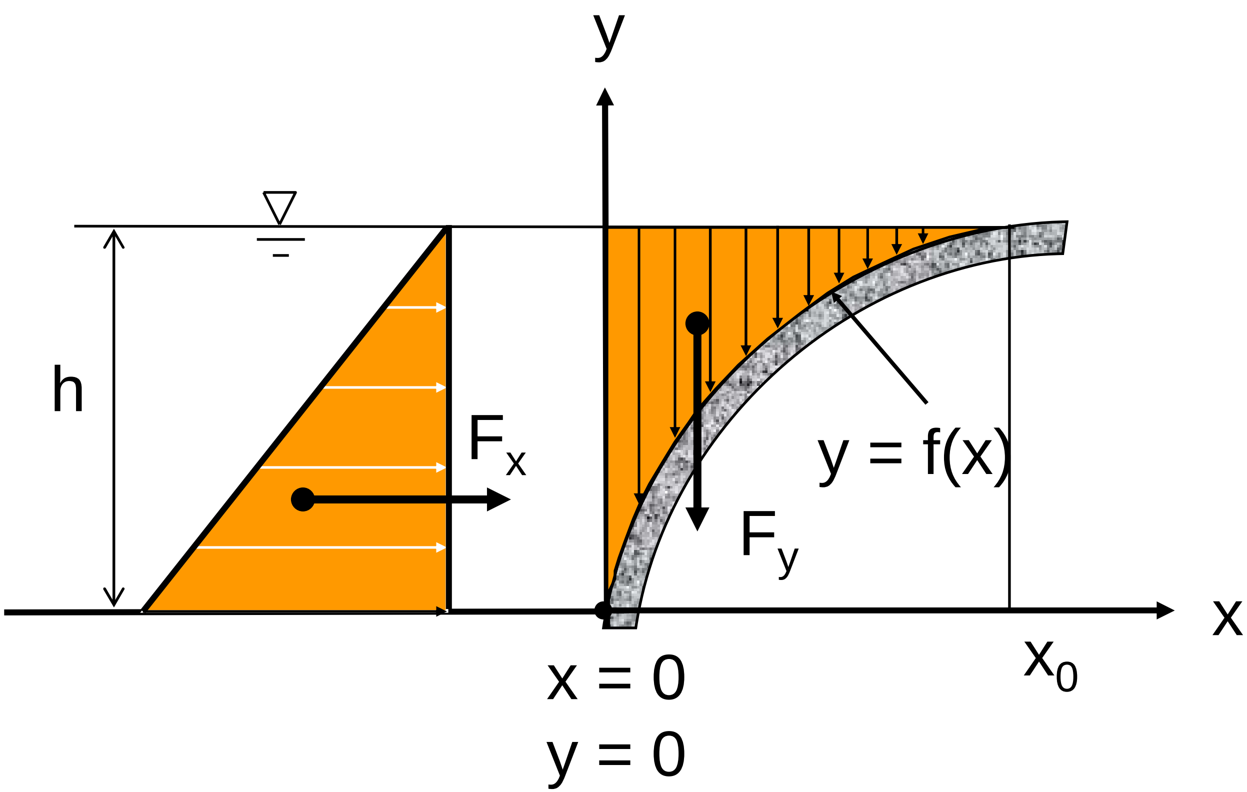
$$F_y = \int_0^{x_0} p(x) \cdot dx$$

p muss als p(x) dargestellt werden:

$$p(y) = (h - f(x)) \cdot \gamma$$

$$F_y = \gamma \cdot \left[h \cdot x - \int_0^{x_0} f(x) \cdot dx \right]_{x=0}^{x=x_0}$$

Inhalt der Fläche zwischen dem *Flüssigkeitsspiegel* und der Funktion f(x)



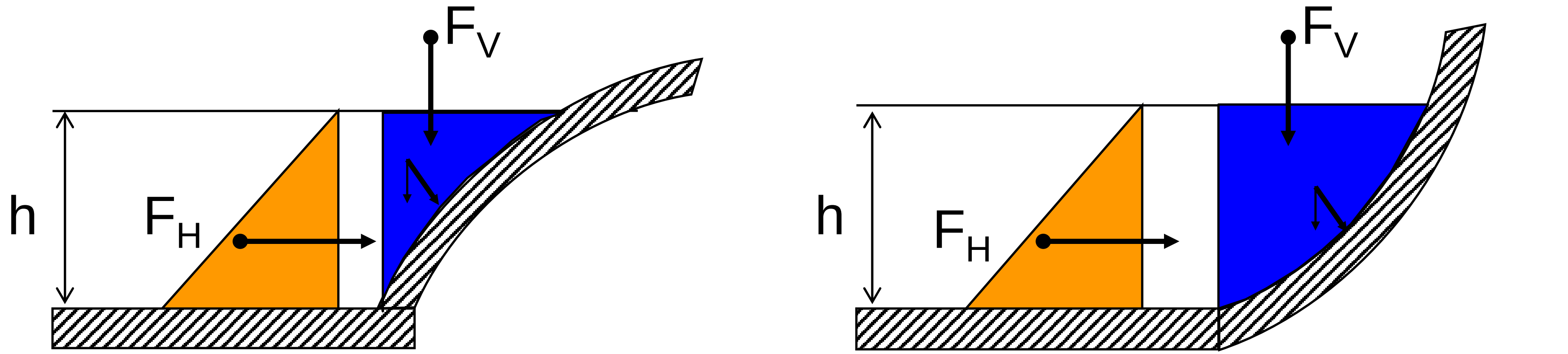
Die gekrümmte Fläche wird durch die beiden Kraftkomponenten F_x und F_y belastet. Der Betrag der resultierenden Kraft ist

$$\boxed{F_r = \sqrt{\left(F_x^2 + F_y^2\right)}}$$

Ihre Richtung ist

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{F_y}{F_x}}$$

Kraftkomponenten an gekrümmten Flächen (schematisch)



Wasserauflast $F_V = \gamma \cdot V$

Die vertikale Kraftkomponente ist nach unten gerichtet, wenn auch die Druckspannungen am Wandelement eine nach unten gerichtete Komponente aufweisen.

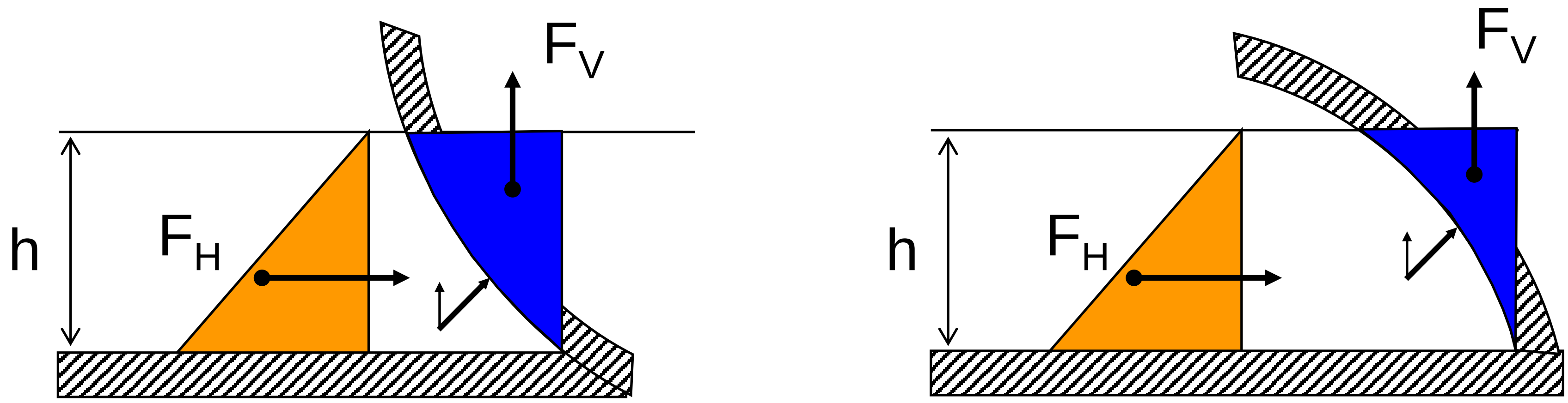
Horizontalkraft $F_H = s \cdot \gamma \cdot h^2/2$

$$F_R = \sqrt{\left(F_H^2 + F_V^2\right)}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_V}{F_H}$$

Die Horizontalkraftkomponente ergibt sich - unabhängig von der Krümmung der belasteten Fläche - aus der linearen Druckspannungs-verteilung multipliziert mit der Belastungsbreite s.

Kraftkomponenten an gekrümmten Flächen (schematisch)



Aufdruckkraft $F_V = \gamma \cdot V$

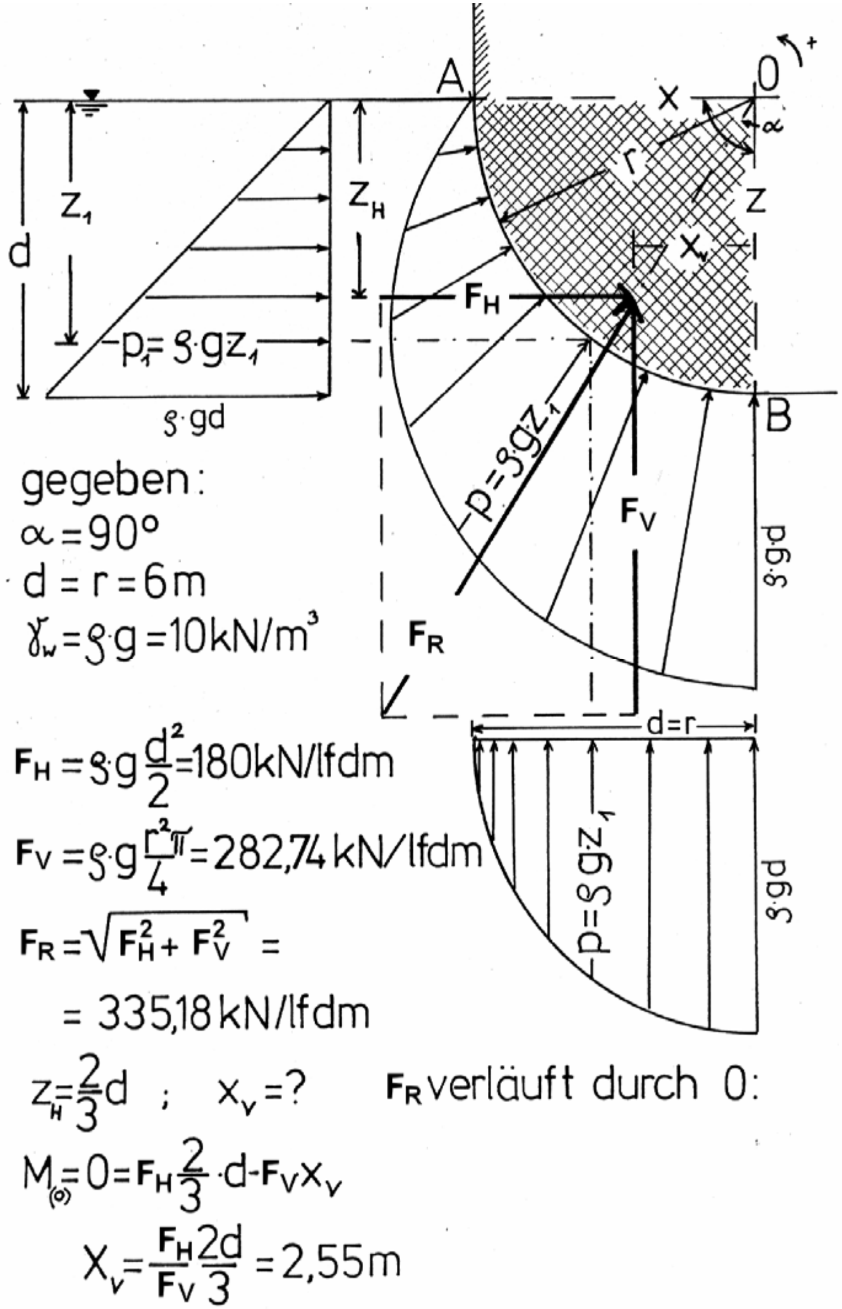
Die vertikale Kraftkomponente ist nach oben gerichtet, wenn auch die Druckspannungen am Wandelement eine nach oben gerichtete Komponente aufweisen.

Horizontalkraft $F_H = s \cdot \gamma \cdot h^2/2$

Die Horizontalkraftkomponente ergibt sich - unabhängig von der Krümmung der belasteten Fläche - aus der linearen Druckspannungsverteilung multipliziert mit der Belastungsbreite s.

$$F_R = \sqrt{\left(F_H^2 + F_V^2\right)}$$

$$\tan\alpha = \frac{F_V}{F_H}$$



Druck an gekrümmten Flächen:

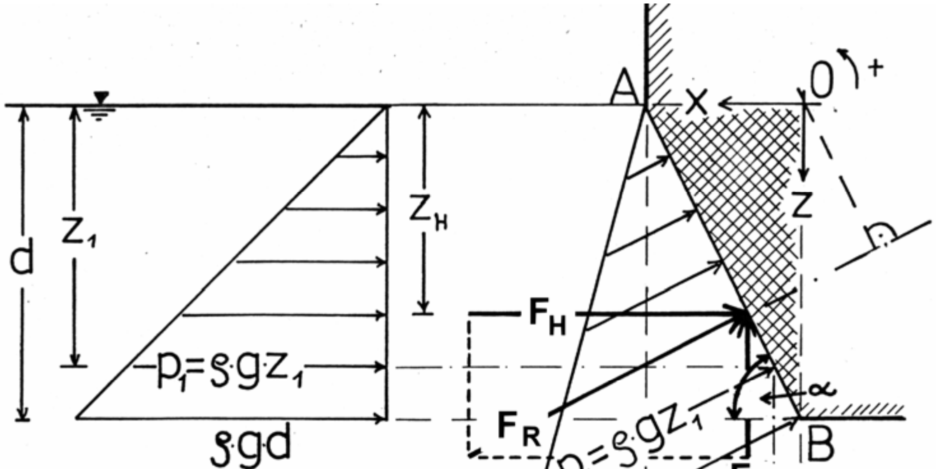
Die horizontale Kraftkomponente F_H an einer beliebig gekrümmten Fläche ergibt sich aus den örtlichen Druckspannungen bezogen auf die vertikale Projektionsfläche der gekrümmten Fläche

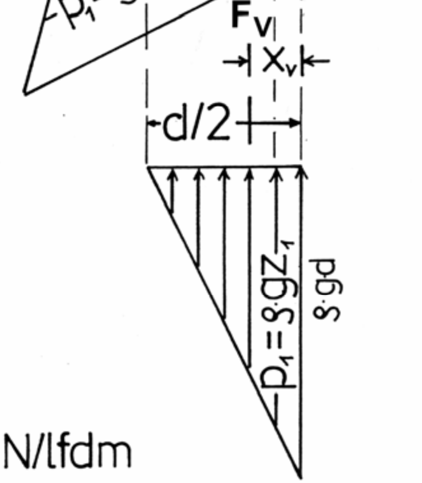
und die vertikale Kraftkomponente F_V ergibt sich aus denselben örtlichen Druckspannungen bezogen auf die horizontale Projektionsfläche der gekrümmten Fläche.

Sonderfall Kreiskrümmung:

Da alle elementaren Druckspannungsordinaten auf den Kreismittelpunkt gerichtet sind, verläuft auch die aus der Druckspannungsfigur resultierende Kraft F_R durch den Kreismittelpunkt.

Demnach ist die Summe der Teilmomente aus den Kraftkomponenten F_H und F_V von F_R bezüglich des Kreismittelpunktes gleich Null.





gegeben:

$\tan\alpha = 2{,}0$; $d = 6\,m$

$\gamma_w = \rho \cdot g = 10\,kN/m^3$

$F_H = \rho g \frac{d^2}{2} = 180\,kN/lfdm$

$F_V = \rho g \frac{d^2}{4} = 90\,kN/lfdm$

$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} = 201{,}25\,kN/lfdm$

$z_H = \frac{2}{3} d$; $\quad x_V = \frac{1}{3}\frac{d}{2}$

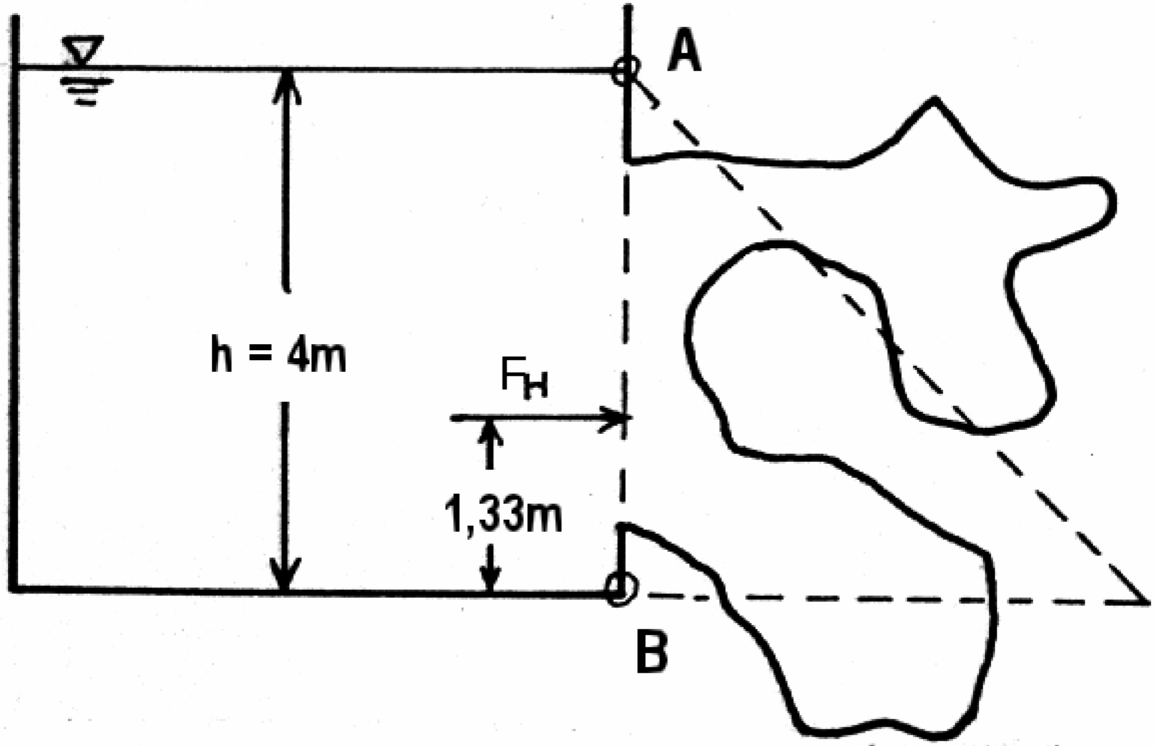
$M_{(0)} = \rho g \left[\frac{d^2}{2} \cdot \frac{2d}{3} - \frac{d^2}{4} \cdot \frac{d}{6} \right] =$

$= + \frac{7}{24} \rho g d^3$

$= 630\,kNm/lfdm$

Das für gekrümmte Wände erhaltene Ergebnis gilt selbstverständlich auch für die Kraftkomponenten F_H und F_V an einer ebener Wand.

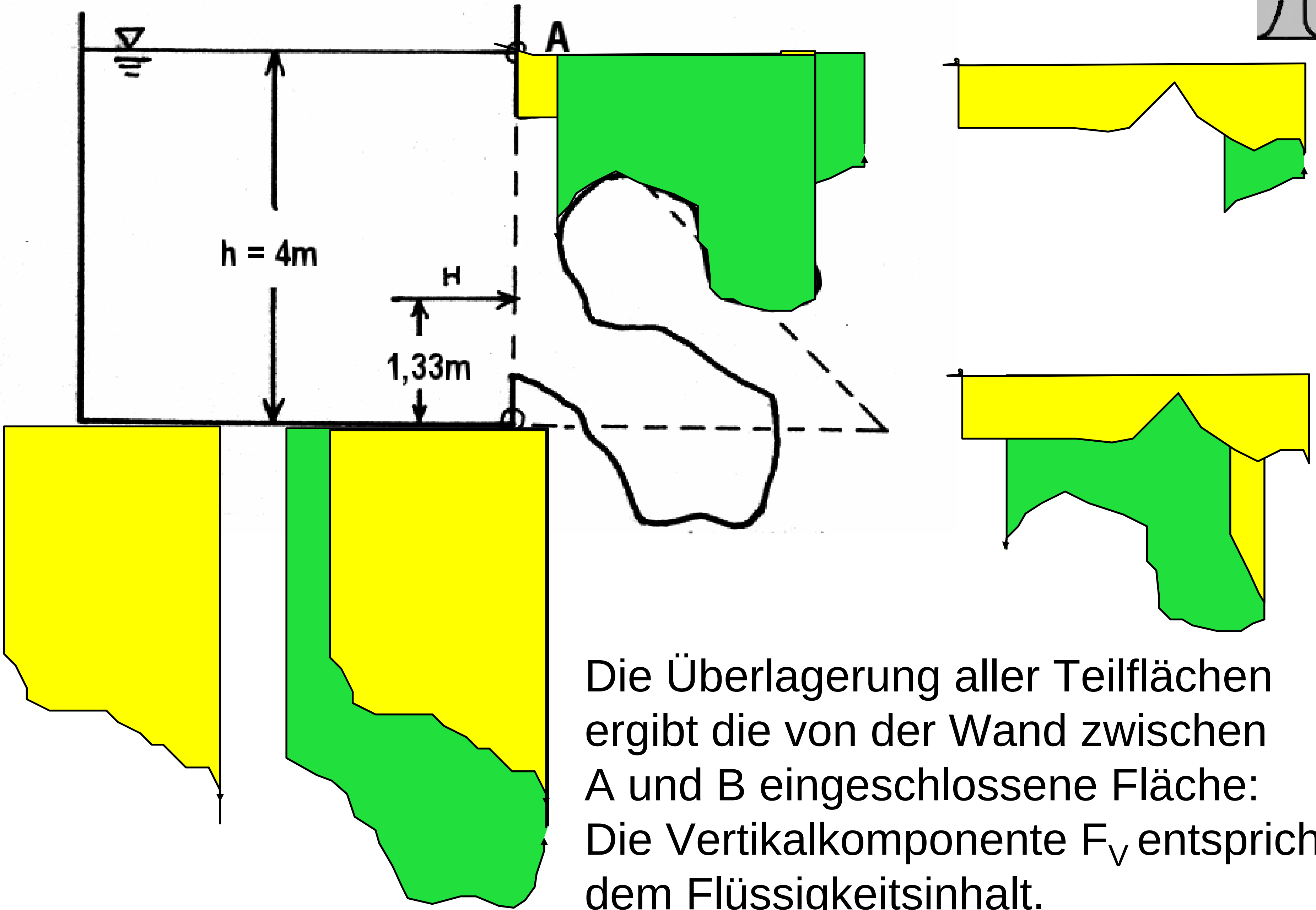
Vergleiche Aufgabe auf 02...



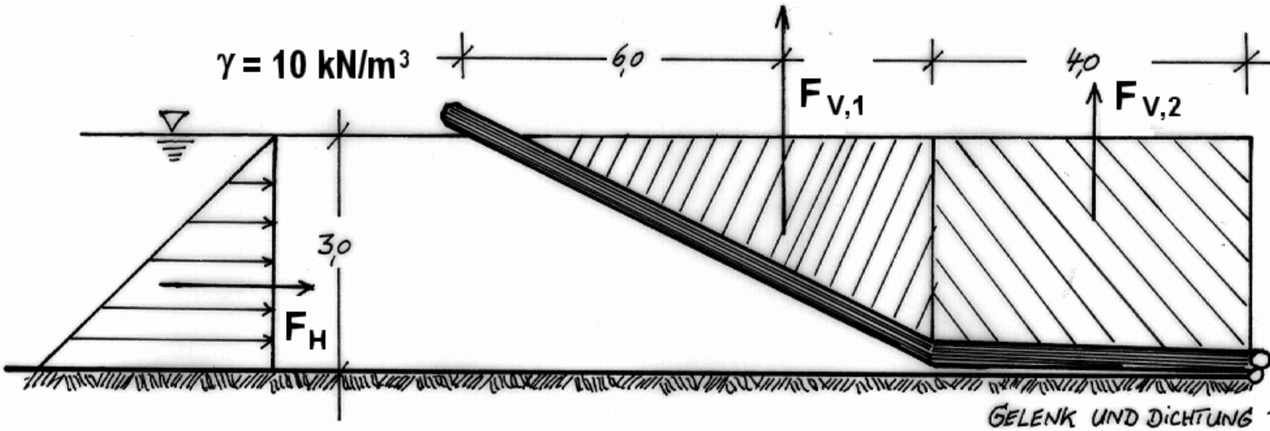
a. Horizontale Kraftkomponente bezüglich der *unregelmäßig* gestalteten rechten Wand zwischen A und B ?

b. Wie ist die vertikale Kraftkomponente zwischen A und B zu berechnen ?

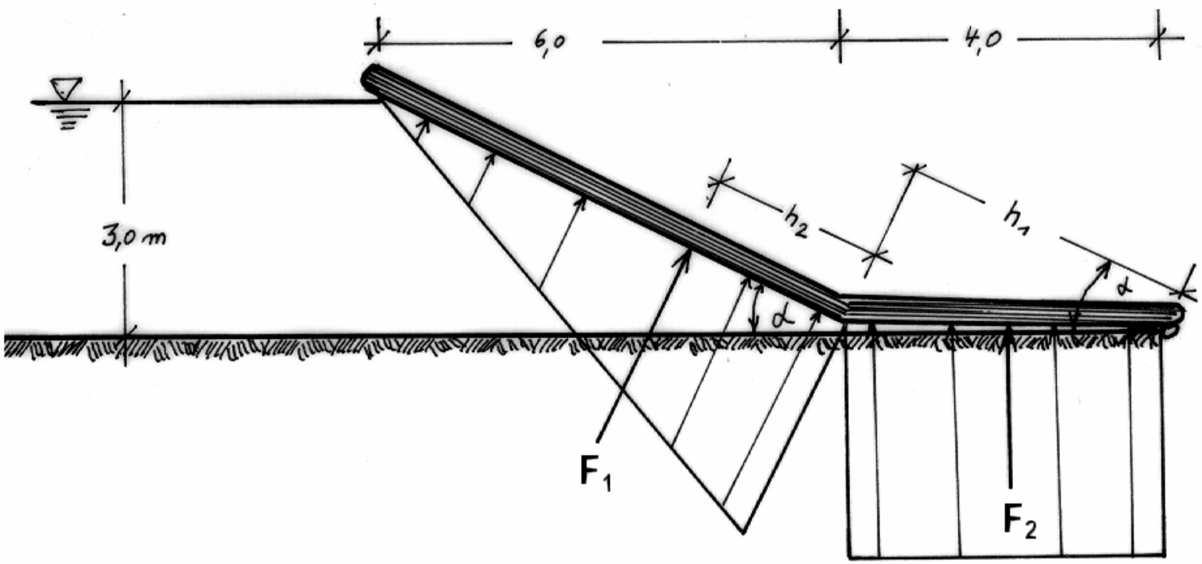
$$F_H = \gamma\, h^2 /2 = 80 \text{ kN}$$



Die Überlagerung aller Teilflächen ergibt die von der Wand zwischen A und B eingeschlossene Fläche: Die Vertikalkomponente F_V entspricht dem Flüssigkeitsinhalt.



Die dargestellte Winkelstruktur ist gelenkig mit dem Boden eines Behälters verbunden.
Es soll das auf die Struktur einwirkende Moment aus hydraulischen Kräften ermittelt werden.

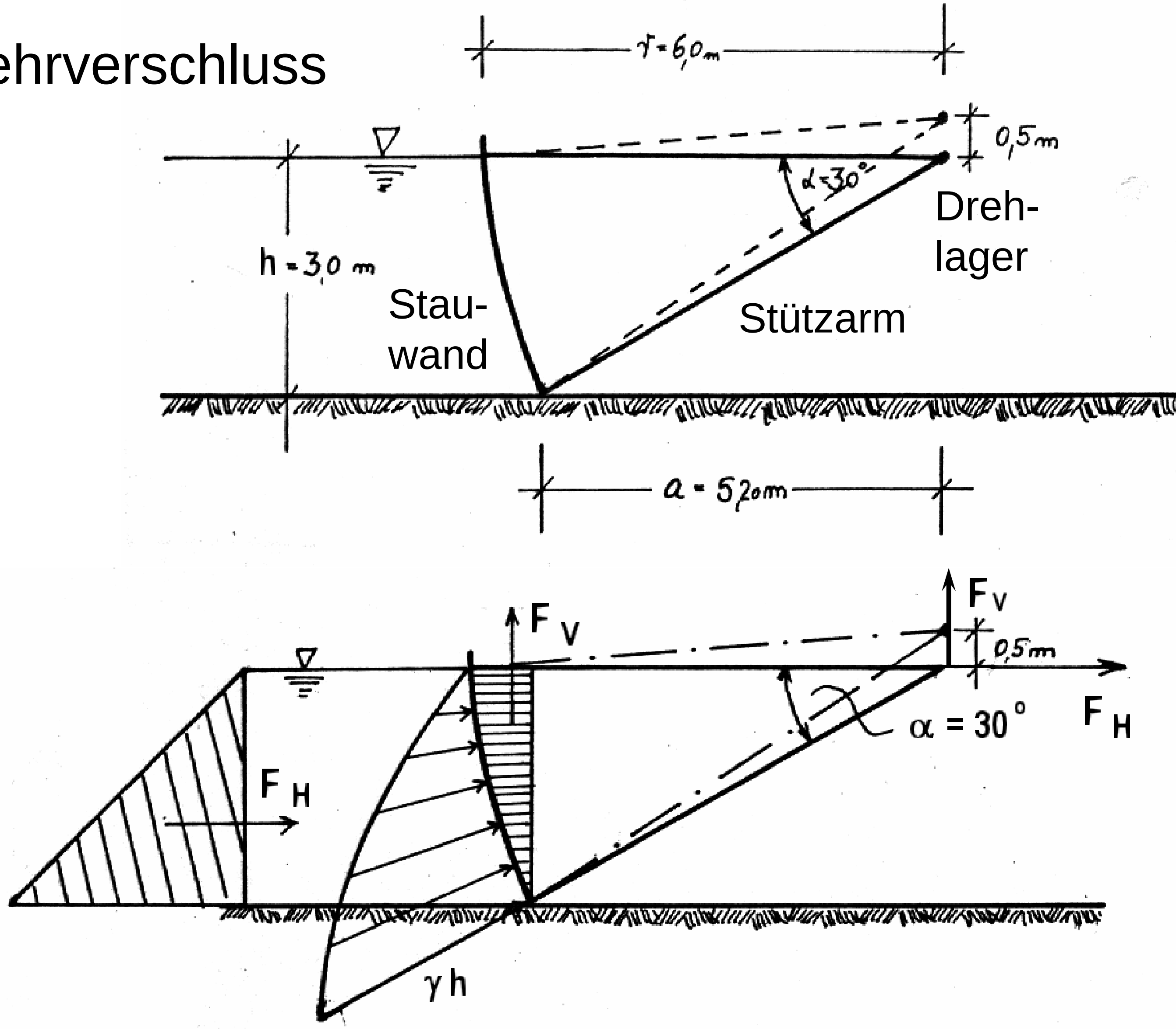


Die Lösung für die Kraftkomponenten ist einfacher, da die Hebelarme sofort angegeben werden können.

Ergebnis:
M = 825 kNm/lfdm

Überprüfen Sie neben den beiden dargestellten Lösungswegen auch die formale Bestimmung des Druckmittelpunktes.

Wehrverschluss

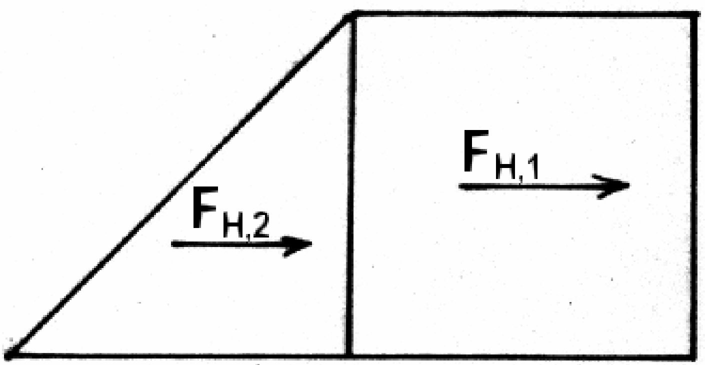


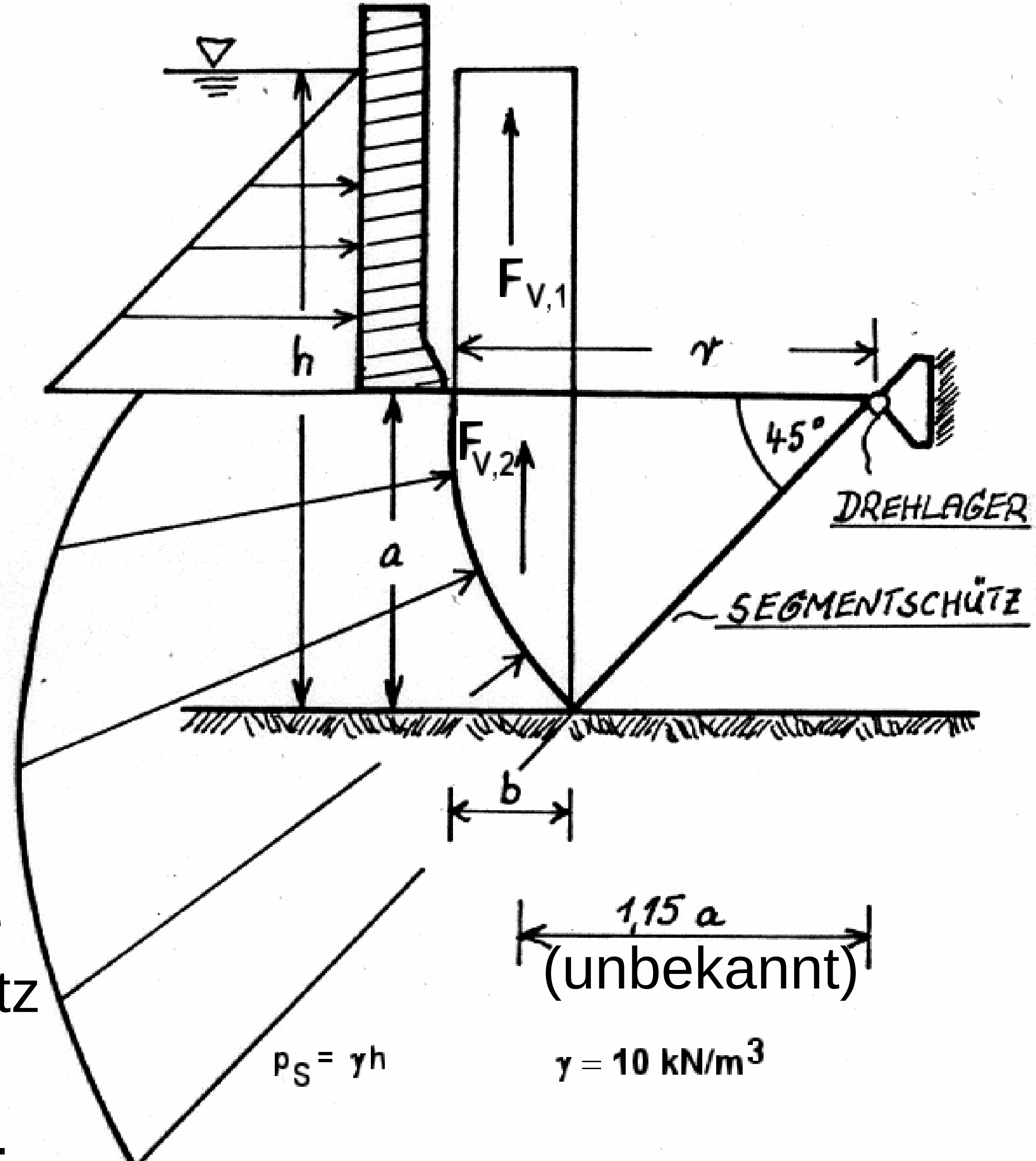
<u>Segmentschütz(e):</u>
Kennzeichen ist eine kreisförmige Stauwand.
An der Unterkante ist eine sog. Aufsatzdichtung vorhanden.

Die resultierende hydraulische Kraft verläuft durch den Kreismittelpunkt.
F_H = 45,00 kN/m
F_V = 16,25 kN/m
F_R = 47,84 kN/m.
a. Welches ist der Hebelarm der vertikalen Kraftkomponente ? (5,54m).

b. Wie groß ist das aus der hydraulischen Belastung resultierende Moment, wenn das Drehlager 0,5m senkrecht oberhalb des Kreismittelpunktes liegt ?

Segmentverschluss an einer Staumauer





Gesucht ist die resultierende hydraulische Kraft F_R am Segmentschütz nach Betrag und Richtung sowie deren Angriffspunkt.

$$F_{H1} = \rho \cdot g \cdot (h - a) \cdot a \ [\text{kN/m}]$$

$$F_{H2} = \rho \cdot g \cdot \frac{a^2}{2} \ [\text{kN/m}]$$

$$F_H = F_{H1} + F_{H2} = \rho \cdot g \cdot a \cdot \left((h - a) + \frac{a}{2} \right) = \rho \cdot g \cdot a \cdot \left(h - \frac{a}{2} \right) [\text{kN/m}]$$

$F_{V1} = \rho \cdot g \cdot (h - a) \cdot \mathrm{b} \ [\text{kN/m}]$ mit $r = a \cdot \sqrt{2}$ und $r - a = b$

ergibt sich $b = a \cdot \left(\sqrt{2} - 1 \right) = 0{,}41 \cdot \mathrm{a}$

$$F_{V1} = \rho \cdot g \cdot (h - a) \cdot 0{,}41 \cdot a \ [\text{kN/m}]$$

F_{V2} ergibt sich aus der Subtraktion des gleichschenkligen Dreiecks von 1/8 der Kreissektorfläche.

$$F_{V2} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{a^2}{2} \right) = 0{,}29 \cdot a^2 \ [\text{kN/m}]$$

$$F_V = F_{V1} + F_{V2} = \rho \cdot g \cdot a \cdot [0{,}41 \cdot (h - a) + 0{,}29 \cdot a] = \rho \cdot g \cdot a \cdot (0{,}41 \cdot h - 0{,}12 \cdot a) [\text{kN/m}]$$

$$F_R = \sqrt{(\rho \cdot g \cdot a)^2 \cdot \left(h - \frac{a}{2}\right)^2 + (\rho \cdot g \cdot a)^2 \cdot (0{,}41 \cdot \mathrm{h} - 0{,}12 \cdot \mathrm{a})^2}\ [\mathrm{kN/m}]$$

$$F_R = \rho \cdot g \cdot a \cdot \sqrt{1{,}17 \cdot h^2 + 0{,}26 \cdot a^2 - 1{,}1 \cdot a \cdot h}\ [\mathrm{kN/m}]$$

Der Kraftangriffspunkt der resultierenden F_R:

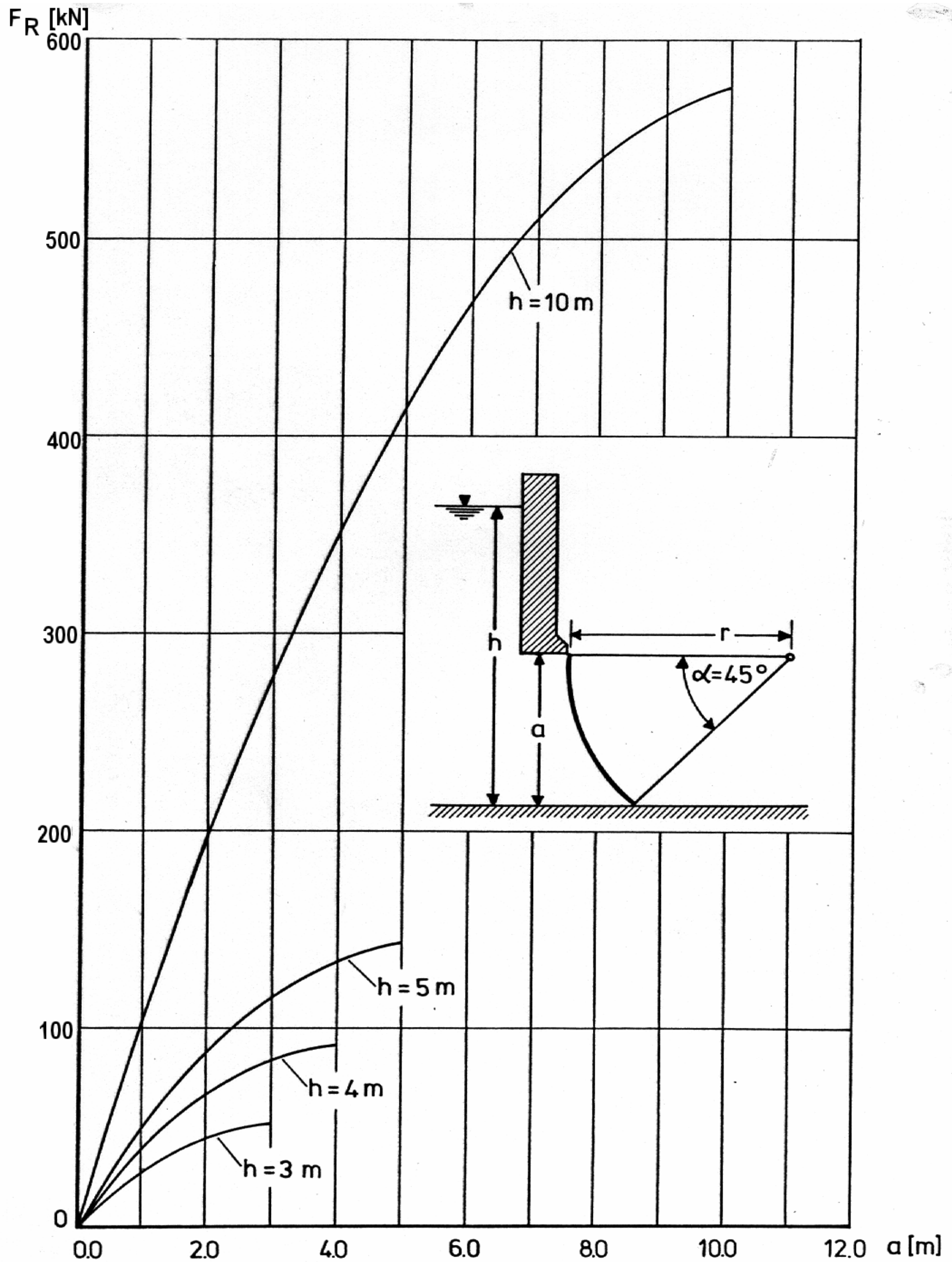
$$\tan\alpha = \frac{F_V}{F_H} = \frac{0{,}41 \cdot h - 0{,}12 \cdot a}{h - \frac{a}{2}}$$

α bezogen auf die Horizontale durch das Drehlager

Der Angriffspunkt von F_{V2} ergibt sich aus der Tatsache, dass die Resultierende F_R bezüglich des Drehlagers kein Moment besitzt:

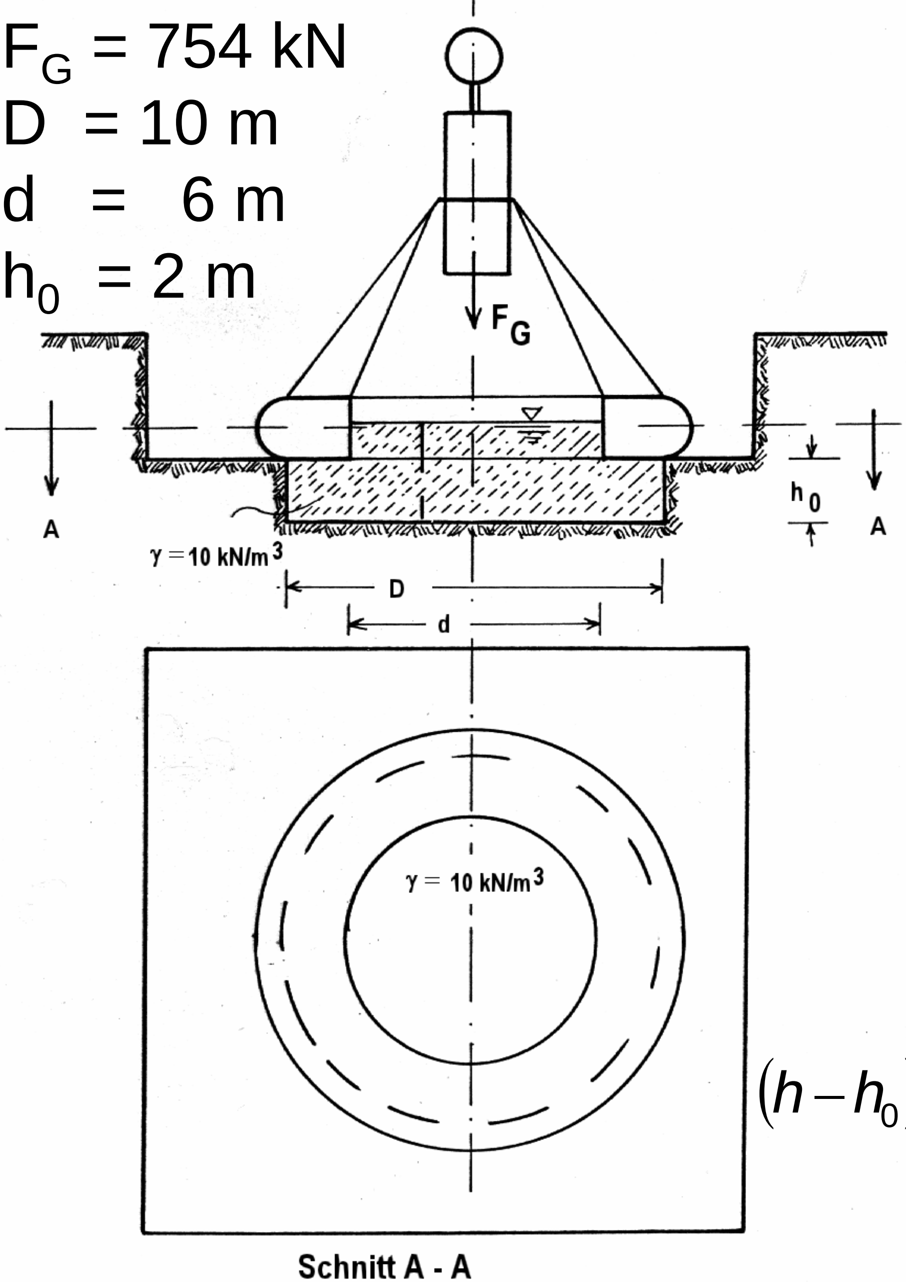
$$M_{[G]} = \sum \Delta M = 0 = -F_{H2} \cdot \frac{2}{3} \cdot a - F_{H1} \cdot \frac{a}{2} + F_{V1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) + F_{V2} \cdot x$$

$$\rightarrow x = 1{,}15 \cdot a$$



F_R [kN]
600
500
400
300
200
100
0
h = 10 m
h = 5 m
h = 4 m
h = 3 m
h
a
r
α=45°
0.0
2.0
4.0
6.0
8.0
10.0
12.0
a [m]

$F_G = 754$ kN
$D = 10$ m
$d = 6$ m
$h_0 = 2$ m



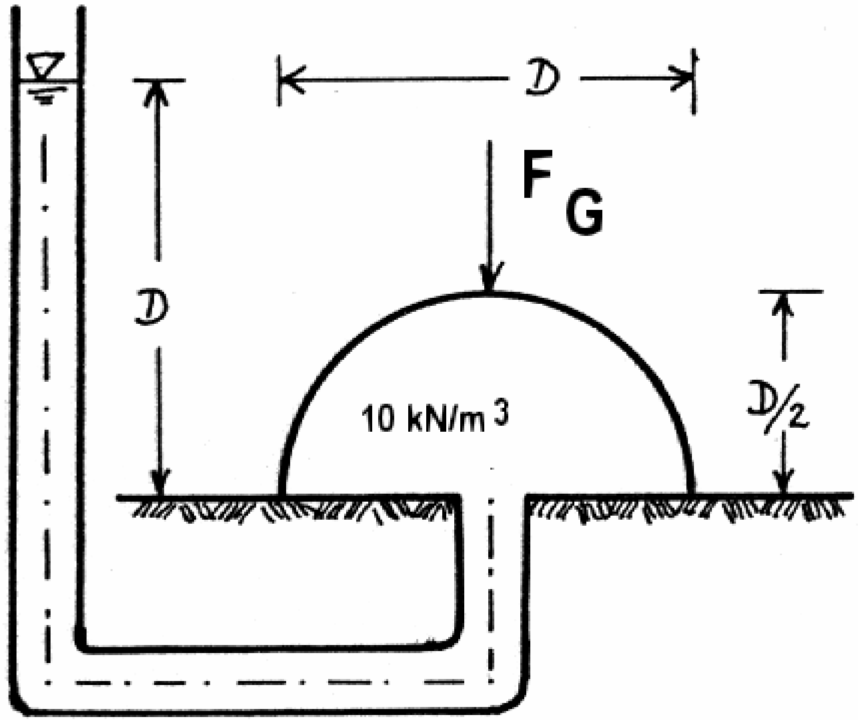
Eine Boje mit kreisringförmigem Auftriebskörper wird durch Füllung des von diesem eingeschlossenen Raumes aufgeschwommen. Bei welcher Gesamtwassertiefe h hebt die Boje vom Boden ab ?

$$F_V = \gamma \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} - \frac{\pi \cdot d^2}{4} \right) \cdot (h - h_0)$$

Gleichgewicht: $F_G = F_V$

$$(h - h_0) = \frac{4 \cdot F_G}{\gamma \cdot \pi \cdot (D^2 - d^2)} = \frac{4 \cdot 754}{10 \cdot \pi \cdot (100 - 36)} = 1{,}5\,m$$

h = 1,5 + 2,0 = 3,5 m



Der Innenraum eines halbkugelförmigen Hohlkörpers ist mit einer Flüssigkeitssäule verbunden. Welches Eigengewicht F_G muss die Kugelschale mindestens aufweisen, damit sie nicht von der Unterlage abhebt ?

Halbkugelvolumen: $$V = \frac{\pi \cdot D^3}{12}$$

Halbkugeloberfläche: $$O = \frac{\pi \cdot D^2}{2}$$

D = 1,0m, γ = 10 kN/m³

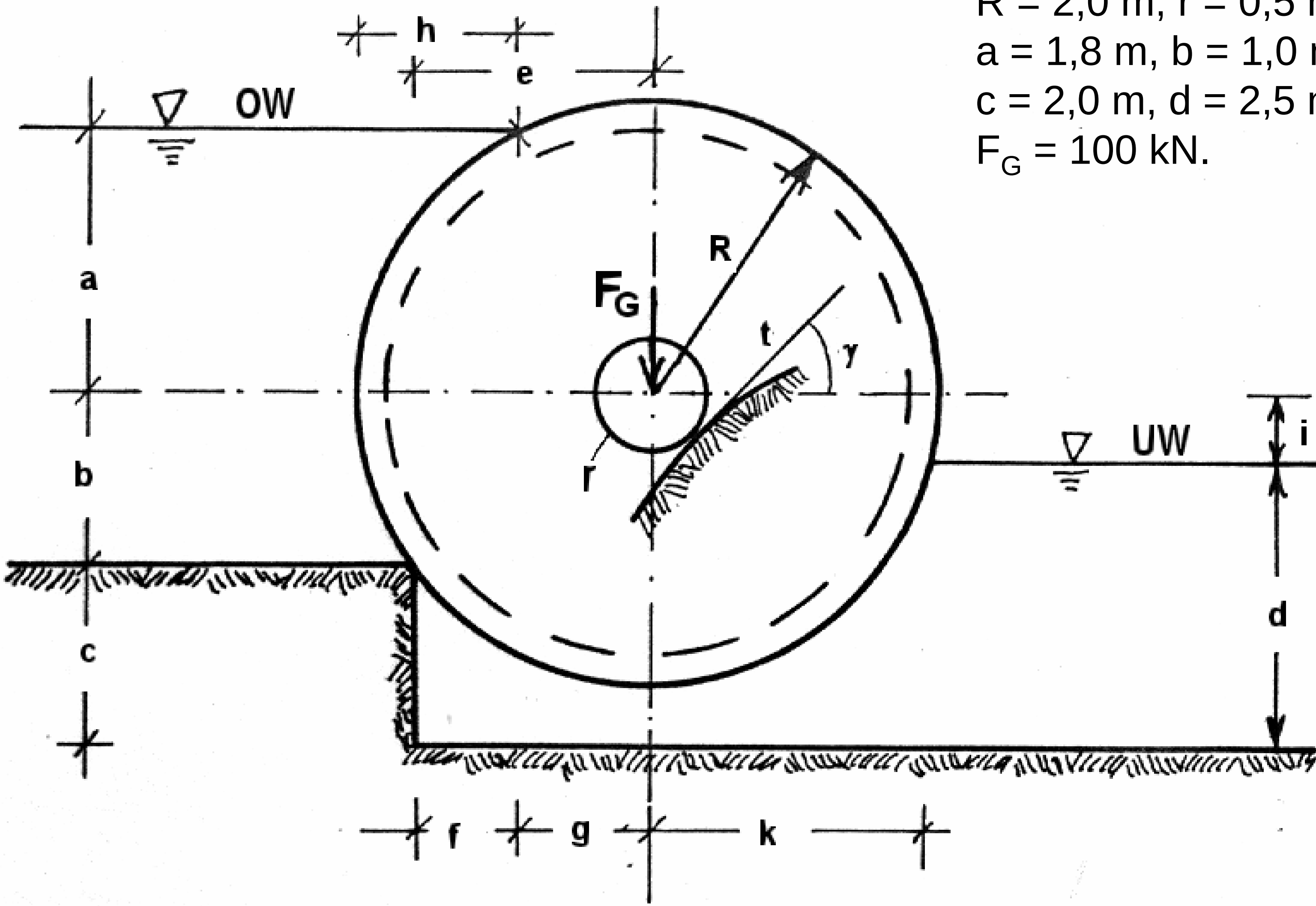
Ergebnis:

$$F_V = \gamma \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot D - \gamma \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{12} = \gamma \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{6} = 10 \cdot \frac{\pi \cdot 1^3}{6} = +5{,}23kN$$

1m² Stahlblech der Stärke 10mm hat ein Eigengewicht von 0,8 kN. Die Oberfläche ist 1,57 m². Gewählte Blechstärke: 45 mm.

$F_G = 0{,}8 \cdot 1{,}57 \cdot 4{,}5 = 5{,}65$ kN $> F_V$

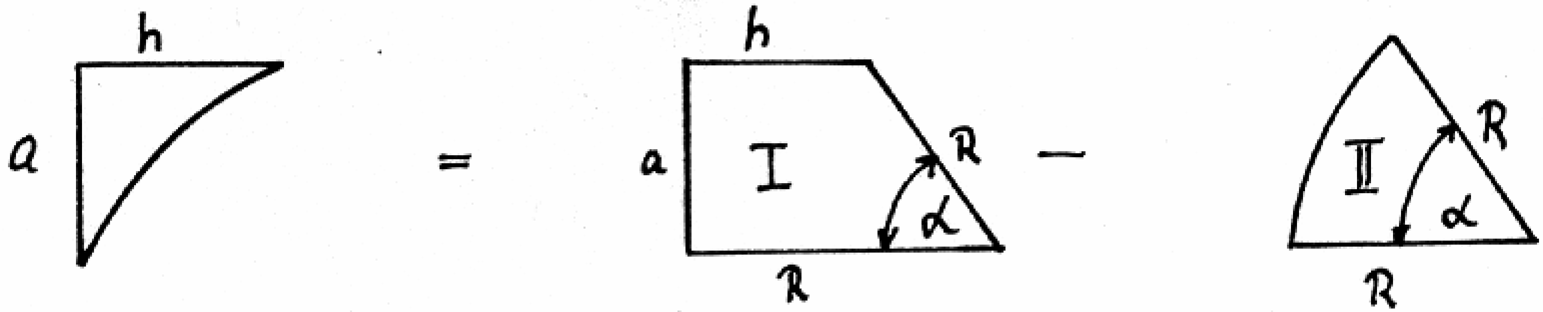
R = 2,0 m, r = 0,5 m,
a = 1,8 m, b = 1,0 m,
c = 2,0 m, d = 2,5 m,
F_G = 100 kN.



a. Welchen Betrag hat die resultierende hydraulische Kraft am dargestellten Walzenwehr ?

b. Welchen Betrag hat der Neigungswinkel γ der Rollbahntangente t im Gleichgewichtsfall ?

nach unten:



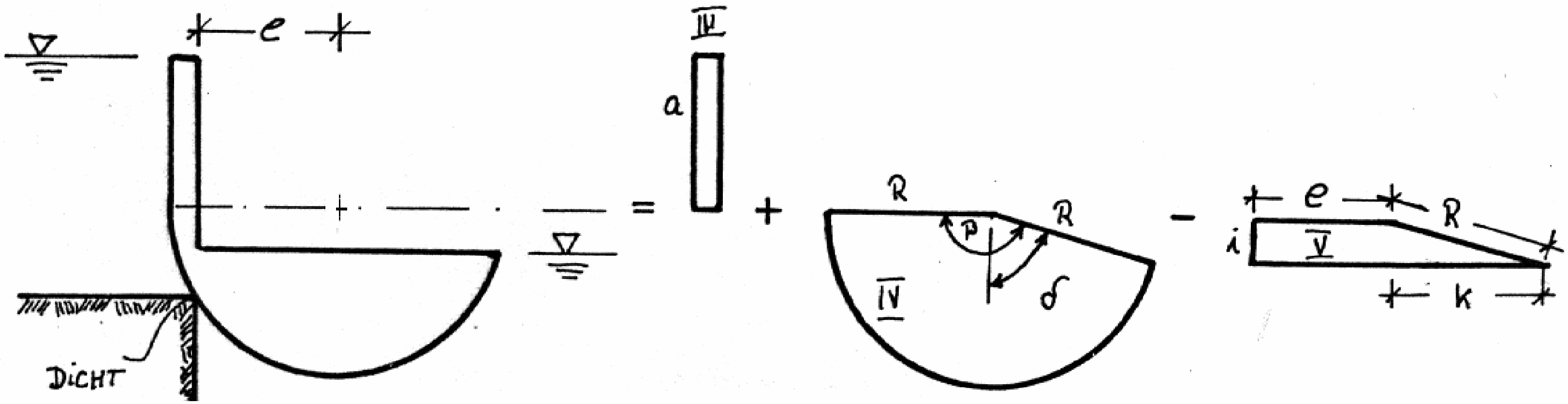
$$\sin\alpha = \frac{a}{R} = \frac{1,80}{2,0} = 0,9 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 64,16^{o}$$

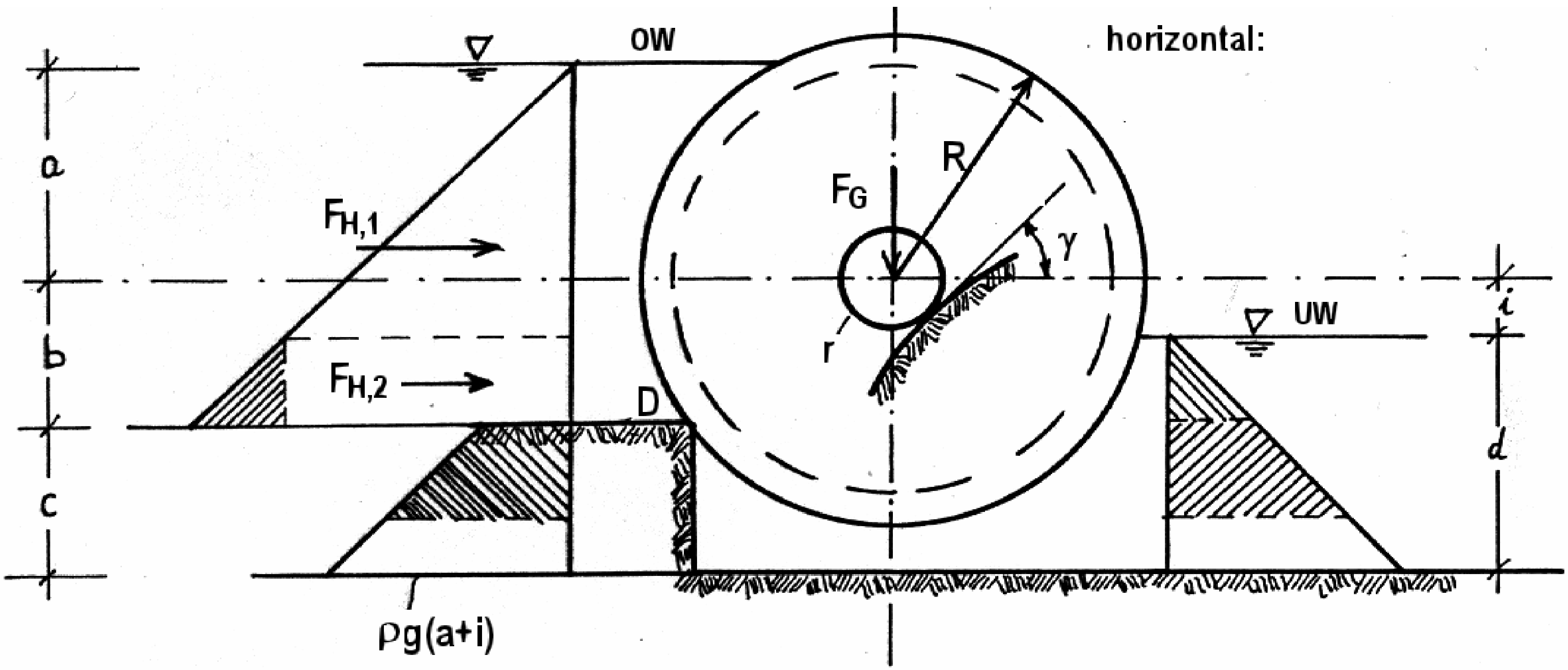
$$g = R \cdot \cos\alpha = 2 \cdot 0,436 = 0,87 \text{ m}$$

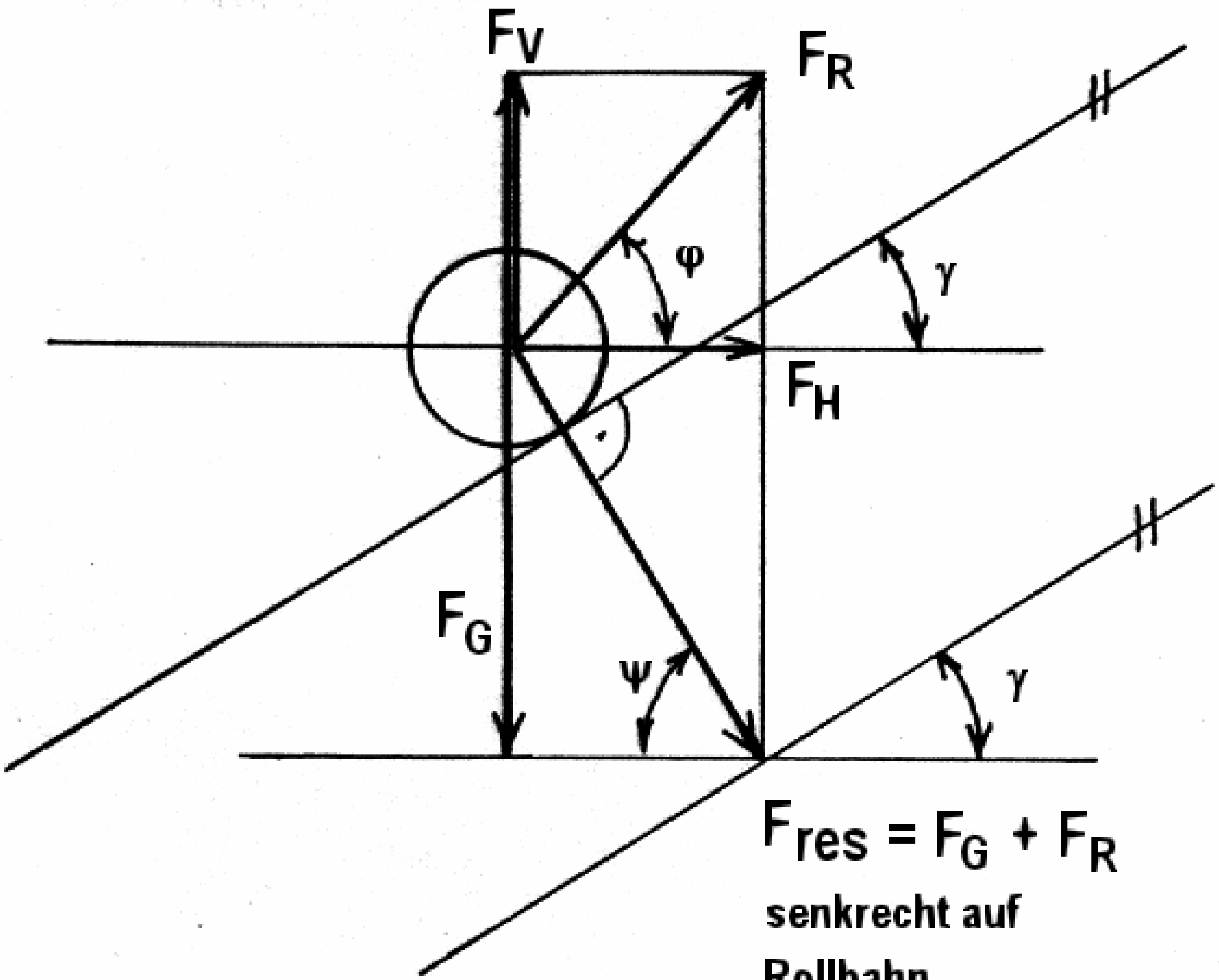
$$h = R - g = 2 - 0,87 = 1,13 \text{ m}$$

$$A_I = \frac{(R + h)\,a}{2} = \frac{(2 + 1,13) \cdot 1,8}{2} = 2,81 \text{ m}^2$$

nach oben:


e
DICHT
a
=
+
R
R
β
δ
IV
-
i
e
R
V
k


OW
horizontal:
a
R
F_G
$F_{H,1}$
γ
i
UW
b
r
$F_{H,2}$
D
d
c
ρg(a+i)


F_V
F_R
φ
γ
F_H
F_G
ψ
γ
$F_{res} = F_G + F_R$
senkrecht auf
Rollbahn